现代应用数学丛书

量子力学中的数学方法

〔日〕朝永振一郎　谷　純男　等著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

量子力学中的数学方法

——散射問題——

朝永振一郎
宮島龙兴
〔日〕谷　純男 著
会津　晃
宮澤弘成
周民强　賈奔誉　譯
关　肇　直　校

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。本书內容集中討論散射問題，共分七章，包括势散射，散射問題的符号方法，S-陣，場論中的散射問題，色散关系等內容。本书可供高等学校数学系、物理系师生和研究工作者作参考。

現代应用数学丛书

量子力学中的数学方法

——散射問題——

原书名　量子力学における数学的方法

原著者　〔日〕朝永振一郎　宮島龙兴　谷　純男　会津　晃　宮澤弘成

原出版者　岩　波　书　店

譯　者　周民强　賈弃啓

校　者　关　肇　直

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可證出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

开本 850×1168 1/32　印張 3 30/32　字数 91,000

1961年12月第1版　1961年12月第1次印刷

印数 1—25,000

統一书号：13119·438

定　价：(十四) 0.68 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯課。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　　录

目　　录

第1章 势 散 射

在物理学中有各种各样的散射問題，現在我們从最簡单的势散射开始談起，其余的問題放在第2章以后再討論。所謂势散射，象电子在原子核 Coulomb 場中散射时那样，是某些粒子受到一定势能所表示之力而散射的情形。而其他較复杂的散射問題，便可以用这个势散射作为范例来討論。

散射問題中的数学內容在于計算散射截面，因此我們在§1中先叙述古典力学的截面定义及其計算方法。而在§2中說明如何将此截面的含义相应地推置到量子力学中，并論証求截面的問題就归結为求散射振幅的問題。在§3，§4中說明散射振幅的求法，其中§3是关于 Born 近似的方法；§4則介紹分波法。§5将就二、三个例子作較詳細的討論，并且闡述如何由实例进行具体推算。§6介紹包含时間的微扰論方法的应用。

§1 古典力学中的势散射

量子力学中对散射問題的处理是与古典力学中的处理方法相对应的，因此，我們先来叙述古典力学的处理方法。

为了給截面下定义，設想如下理想化的实驗：在坐标原点 O 上放一靜止的散射体(引起散射并成为靶的粒子)，然后从十分远的 A 处向靶的方向入射粒子 P。这时 P 不一定限于与 O 正面直接碰撞，但在接近于 O 时，由于受散射体的作用，将使前进方向偏轉到与原来方向不同的 A' 方向上。我們称这个偏轉角 θ 为散射角，它随着靠近的方向而有所不同。为了指明所靠近的方向，采用当 P 未散射而直进时的軌道与 O 的最短距离值 b，并称 b 为碰撞参

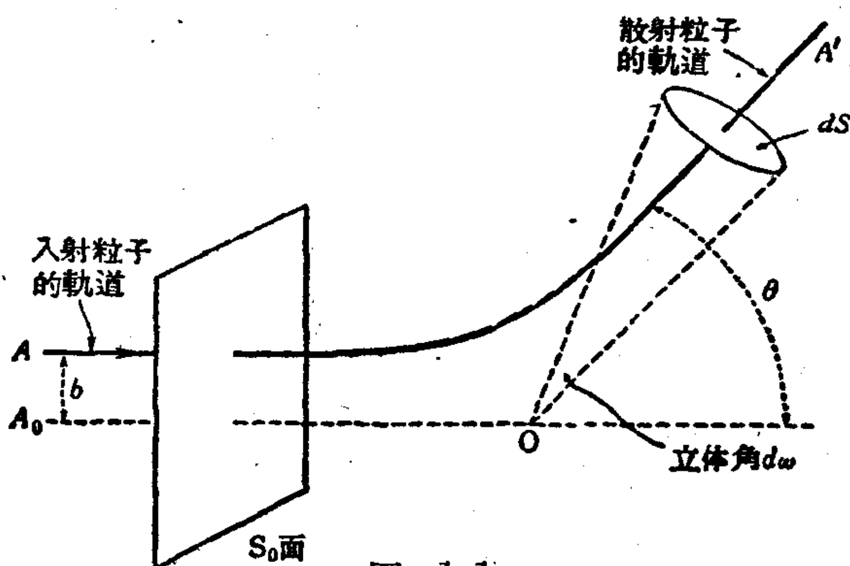


图 1.1

数。如果我們知道了 O 对 P 的势能 $V(x)$，便可依据古典力学計算出散射粒子的軌道，而在已知 b 的情况下，散射角 $\theta=\theta(b)$ 亦可求得。

然而，在原子物理中，与台球的碰撞不同，在作了实际的試驗之后，并不能完全精确地知道每一个入射粒子的 b❶，而接踵地出現具有各种不同 b 的粒子。于是，我們用几乎由一定的方向 A_0O 入射的多数个粒子来反复做散射实驗，以便观察在散射后，究竟朝那个方向，以及有多少粒子出現等的分布情况。为此，我們設想入射粒子和垂直于入射方向的面 S_0 的交点在 S_0 面上是杂乱而无規律的❷。定量地說，設在 S_0 的单位面积上入射 N 个粒子，于是在离 O 充分远的点 A' 上，散射后通过垂直于 OA' 的面积元 dS 的粒子数与 $Nd\omega$ 成比例（$d\omega$ 为 dS 对 O 所張的立体角），并把它記为 $N\sigma(\theta,\varphi)d\omega$❸。在多数情况下，这种散射現象在入射方向 A_0O 周圍是軸对称地发生的，而与周圍的方位角无关，故 $\sigma(\theta,\varphi)=\sigma(\theta)$。对于整个立体角来說，就有

❶ 为了确定方向而使用狭縫时，必需要开一个象分子那样大小的孔，这不仅在技术上不可能，并且还要受测不准关系的限制。

❷ 在处理对于时間是定常态的粒子束时，仍需指明是单位时間的。

$$\sigma N=\int\sigma(\theta)\,d\omega\cdot N=2\pi\int\sigma(\theta)\,d\cos\theta\cdot N$$

个粒子被散射。此时，我們称 $\sigma(\theta)$ 为微分截面，σ 为总截面。其所以称为"截面"，是因为它具有面积的量綱❶，且又从下面簡单情形看出，σ 在直观上是表示靶的大小。設此靶是一个半徑为 a 的剛球，則当粒子与它相碰撞时，必定引起散射，于是，假如入射粒子是从外部直进，則被散射的粒子（如图 1.2 所示）在 S_0 面上就受面积 πa^2 的截口所限制，因此当总截面 $\sigma=\pi a^2$ 时，恰好等于靶的大小。

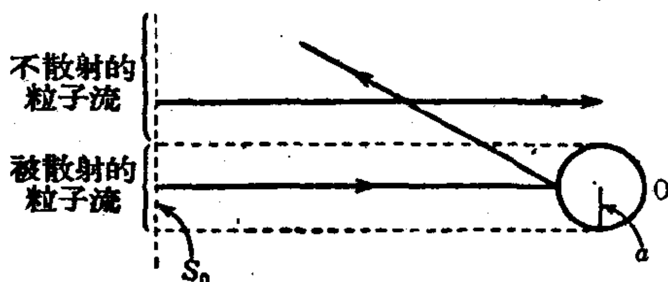


图 1.2

这样，若势能为已知，那就可按下列方式具体地計算截面：如前所述，設碰撞参数 b 与散射角 θ 的关系 $b=b(\theta)$ 已根据力学求出，此时，通过立体角 $d\omega=\sin\theta d\theta d\varphi$ 的粒子在入射时必通过 S_0 面上（图 1.2）的 $b\,db\cdot d\varphi$ 的面积，

$$\sigma(\theta)\sin\theta d\theta d\varphi=|db|\,bd\varphi,$$

从而

$$\sigma(\theta)\sin\theta=b\left|\frac{db}{d\theta}\right|, \tag{1.1}$$

$$\sigma=2\pi\int_0^\pi\sigma(\theta)\sin\theta d\theta. \tag{1.2}$$

所以，計算截面就归結为求关系式 $b=b(\theta)$ 了。下面就具体的 V 来求截面。

例 1 井字型势　即我們的着眼点仅在于：散射体的作用是在一个較小的有限范圍內，而不問其势的更細致造式。于是，常取为

$$V(r)=\begin{cases}V_0, & r\leqslant a,\\ 0, & r>a.\end{cases} \tag{1.3}$$

❶ $[N]=l^{-2}$，$[\sigma(\theta)d\omega\cdot N]=1$，故 $[\sigma(\theta)]=l^2$.

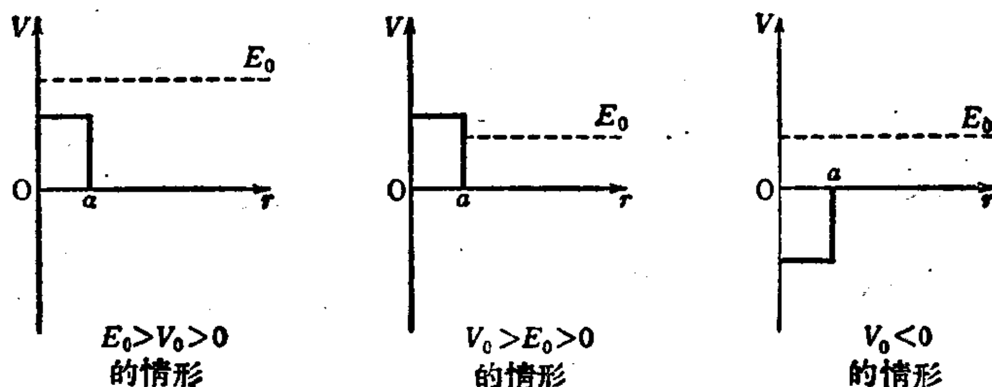


图 1.3

V_0 不論从正、負那方面看，当 $V_0>0$ 时，力总是排斥力，而 $V_0<0$ 时是吸引力。現設有一速度为 v_0，动能为 $E_0=\left(\frac{m}{2}\right)v_0^2$ 的粒子入射(其碰撞参数为 b)。当 $V_0<E_0$ 时，粒子不进入势井內，而当 $V_0>E_0$ 时，則进入。因此，当 $V_0>E_0$ 和 $V_0<E_0$ 时情况大不相同。首先我們考慮 $V_0>E_0$ 时的情况。

当 $b>a$ 时，$b=b(\theta)$ 的关系是 $b=\text{const}$。当 $b<a$ 时，在碰撞处恰好与光的反射相同。这是由于碰撞前后角动量守恒，且由 O 至軌道的垂綫长在碰撞前后是相等的緣故。由此

$$b=a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{1.4}$$

从而 $\sigma(\theta)=\frac{a^2}{4}$，即散射是各向等同的，而总截面就等于势能的大小：$\sigma=\pi a^2$。

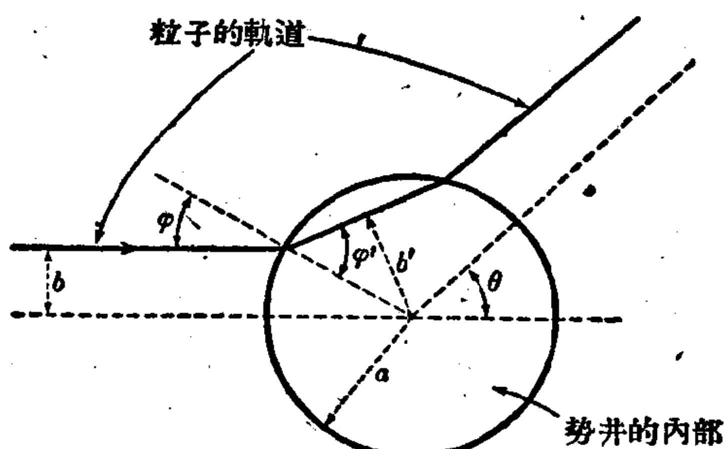


图 1.4

当 $E_0>V_0$ 时，$b>a$ 的情况与上述情况相同，若 $b<a$，粒子就进入势井的內部。这时粒子的速度和方向均有改变，而由能量守恒定律

$$v^2+2\frac{V_0}{m}=v_0^2 \tag{1.5}$$

可以求得 v，又由角动量守恒定律

$$bv_0=b'v \tag{1.6}$$

可以求得 b'.(1.6)是表明通过势垒时的折射律，且

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}=\frac{v_0}{v} \tag{1.7}$$

成立。而在脱离势垒时也同样，散射角

$$\theta=2(\varphi'-\varphi). \tag{1.8}$$

应用(1.8)，从(1.5)求出 $b=b(\theta)$ 的关系时$\left(\text{設 } \alpha=\frac{v}{v_0}\right)$，若为吸引力($\alpha>1$)，则成为

$$b^2=a^2\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left[1-2\alpha\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\alpha^2\right]. \tag{1.9}$$

若为排斥力($\alpha<1$)，则当 $b\leqslant a\alpha$ 时，(1.9) 成立，而当 $b\geqslant a\alpha$ 时，(1.4)成立。又在吸引力时，截面可由下式計算而得

$$\sigma(\theta)=\frac{a^2\alpha^2}{2\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left(\alpha-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\alpha\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1-2\alpha\cos\frac{\theta}{2}+\alpha^2\right)^2}. \tag{1.10}$$

若为排斥力，亦能同样計算。至于計算总截面，则取对 θ 的积分远比对 b 的积分要方便得多，但不管怎样，其結果即是如下所示之具有几何学意义的截面积

$$\sigma=\pi a^2.$$

例 2 Coulomb 散射　設入射粒子的电荷为 Z_1e，Coulomb 場的电荷为 Z_2e，则 Coulomb 場的势 $V=Z_1Z_2\frac{e^2}{r}$。今采用极坐标 (r, α) 表述能量守恒定律与角动量守恒定律，并求在消去时間坐标后的軌道微分方程

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2+r^2+\frac{cr^3}{b^2}=\frac{r^4}{b^2},\quad c=Z_1Z_2\frac{e^2}{mv^2},$$

解上式得出 b 与 θ 的关系

$$b=c\cot\frac{\theta}{2}. \tag{1.11}$$

微分截面为

$$\sigma(\theta)=\frac{c^2}{\left\{4\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}}. \tag{1.12}$$

若欲求总截面，在 $\theta=0$ 时成为发散。而 $\theta=0$ 也就相当于 $b=\infty$，即不論是多大的碰撞参数均有效。限于严格遵守 Coulomb 势起見，$\sigma\to\infty$ 是不可避免的，而在物理学的一些問題中，例如冲击原子核时，在核附近(即使是 Coulomb 的也同样)周圍有电子的地方，Coulomb 势被电子遮蔽，并比 Coulomb 的要弱，这实际上并不难办到。

問題　試証若 Coulomb 势的作用范圍是 $r\leqslant a$，而在他处是 $V=0$，則总截面为 $\sigma=\pi a^2$。(注意(1.11)中相当于 $b\geqq a$ 的微分截面等于0。)

§2　量子力学中的截面

上节中我們用古典力学的方法叙述了势散射，并給出散射截面的定义。本节将就同样問題从量子力学角度来論述，并証明散射截面最后的結論，就是它可用所謂"散射振幅"来表示。

我們首先从量子力学方法来处理上节中理想化的实驗开始。

按一定軌道进行的古典的微粒的运动，在量子力学中是用波束来表示的。这时，作一表示具有一定碰撞参数 b 的入射粒子的波束，若根据 Schrödinger 方程来探求其随时間的变化，則得如下的結論：在一般情况下，散射后不形成一条軌道，而按各个散射角以一定比例扩散。也就是說，碰撞后的运动不能用古典力学的理論来解釋。又，在量子力学中，根据测不准关系可知，几乎具有一定动量的各个入射粒子的碰撞参数 b 的值是有某种寬度的，因此我們就不再考虑相当于古典軌道的波束，而把具有各种散射碰撞参数值的多数粒子加以概括，用同一的波束来表示。現在談談这种波束的性质。

与前相同，設散射中心仍在 O 处(图2.1)，且由 A_0 的方向入射。又令以动量几乎为 $\boldsymbol{k}_0$ 而入射的波束，在时間 $t=0$ 时，差不多

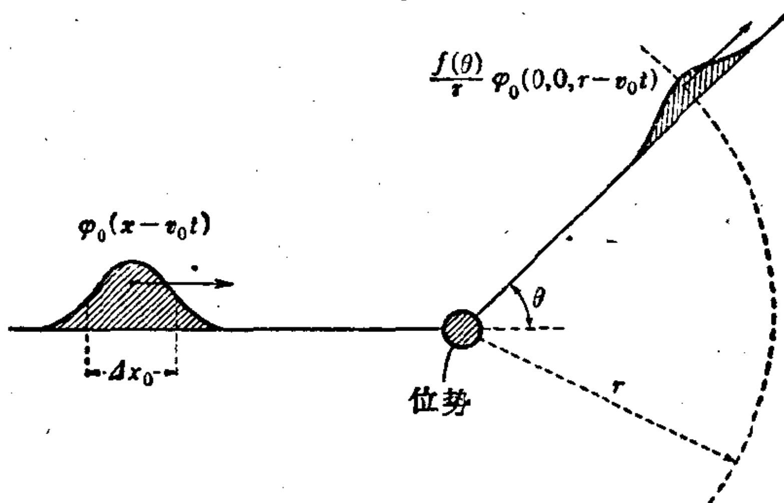


图 2.1

是在 $A_0: x=x_0$ 处。若以 Δx_0 表示其在空間位置的寬度，动量的寬度为 $\Delta k_0$❶，由測不准关系可知

$$\Delta x_0 \cdot \Delta k_0 \gtrsim 1. \tag{2.1}$$

动量几乎是 k_0，所以

$$\frac{\Delta k_0}{k_0} \ll 1. \tag{2.2}$$

又，这种波束的扩散幅度比实驗裝置上的标准长度 R(例如 A_0O)要小；

$$\Delta x_0 \ll R. \tag{2.3}$$

其次，为了使得与各种四散的值 b 的入射粒子相当，必須使整个靶置入波束的扩散范圍以内。假如令靶的大小为 a，則必須

$$\Delta x_0 \gg a. \tag{2.4}$$

除上述之外，倘有一必要条件。即在量子力学中，波束是要随着时間的推移，規則地扩散而变形，因此，在失形前入射波束若不发生碰撞，就成了問題。(上边(2.4)就是假定着这种情况。)現在試求其必要条件。为此，我們有必要来考察波束随时間的变化規律。假定 $t=0$ 时，在近乎是 $x=x_0$ 处的波束与平面波重合，

❶ 无論在 x, y, z 那个方向，都以 Δx_0, Δk_0 作为其大小的代表($\hbar=1$).

$$\psi_0(\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{k}\,a(\boldsymbol{k})\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})=\exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x})\varphi_0(\boldsymbol{x}),\quad(2.5)$$

式中

$$\varphi_0(\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{k}\,a(\boldsymbol{k})\exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{x}].\quad(2.6)$$

$a(\boldsymbol{k})$仅对$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0|\leqslant\Delta k$才具有大的值❶。此波束在势能的作用范圍之外，是按Schrödinger 方程$\frac{i\partial\psi}{\partial t}=H_0\psi$而变化，

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\int d\boldsymbol{k}\,a(\boldsymbol{k})\exp[i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}-E_k t)],$$

式中$E_k=\frac{k^2}{2m}$，在$\boldsymbol{k}_0$附近展开时，就成为$E_k=E_{k_0}+(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)+\frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2}{2m}$，$\boldsymbol{v}_0=\frac{\boldsymbol{k}_0}{m}$。若只限于取一次项，則

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\approx\exp[i(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}-E_{k_0}t)]\varphi_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}_0t),\quad(2.7)$$

即波束不改变其形状，且以速度$\boldsymbol{v}_0$前进。至于上边所忽略的各項，在$\exp\left[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2\frac{t}{2m}\right]$中，当时間不太长时，不会改变$a(\boldsymbol{k})$的形式。若設其条件为$\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0\cong\Delta\boldsymbol{k}$，$t\cong\frac{R}{v_0}$时，就有

$$\frac{(\Delta k)^2\left(\frac{R}{v_0}\right)}{m}\ll1.$$

用(2.1)式又可改写为

$$\Delta x_0\gg\left(\frac{R}{k_0}\right)^{\frac{1}{2}}.\quad(2.8)$$

现在，为确定是否存在满足上述的Δx_0，我們給与下列数値：$R\sim10\,\text{cm}$，$a\sim10^{-8}\,\text{cm}$，$k_0\sim10\,\text{eV}$，$\frac{1}{k_0}$的 de Broglie 波长为$\sim2\times10^{-6}\,\text{cm}$，实际上，取波束的扩散幅度$4\times10^{-3}\ll\Delta x_0\ll10\,\text{cm}$即可，

❶ 例如，可以取$a(k)=(2\pi\Delta)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\Delta^2}\right)$，$\Delta=\Delta x$，但在往后的討論中，我們不涉及$a(\boldsymbol{k})$的具体形式。

例如，取 $\Delta x_0 \sim 10^{-2}$cm。

其次，这个波束实际上是以速度 v_0 在运动，現在我們用式子来确定这件事，并考虑它的規格化。設前进方向取为 z 軸方向，通过垂直于前进方向的面，并在点 A_0 附近的单位面积上的粒子数为

$$\int dt\left(\frac{1}{2mi}\right)(\psi^*\partial_z\psi - \partial_z\psi^*\psi)_{x=x_0}.$$

以(2.7)代入，并注意 $\partial_z\varphi_0 \sim \varphi_0/\Delta x_0 \sim \varphi_0\Delta k_0 \ll \varphi_0 k_0$，則粒子数成为(在时間 $t=0$ 时为最大)

$$\int dt v_0 |\varphi_0(0,\ 0,\ z_0 - v_0 t)|^2. \tag{2.9}$$

現在我們把它規格化成为N个，并設单位面积上入射粒子的密度就是 N。

現在让我們来研究一下，在 $t=0$ 时，以(2.5)的形式出发的波束散射的情况到底如何。在这里，仍然依据于包含有势的 Schrödinger 方程

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t} = (H_0 + V)\psi, \tag{2.10}$$

可是，在实际上要求得解答不是容易的。为使求解方便起見，我們应用将(2.5)略作改变后的形式。

在这以前，让我們先来談談准备知識，即在(2.10)中，令 $\psi = \psi_k e^{-iE_k t}$ 时导出的有关

$$(H_0 + V)\psi_k = E_k\psi_k\ . \tag{2.11}$$

的定态解問題。如下节所示，在(2.9)的解中，离散射中心充分远处❶存在着如下的解：

$$\psi_k(x) \sim \exp(i\,\boldsymbol{kx}) + \left[\exp\left(\frac{ikr}{r}\right)\right]f(\theta). \tag{2.12}$$

这里 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 是球坐标。由附加时間因子 $\exp(-iE_k t)$ 就可知，第

❶ 确切地說，是 $\varphi k - \exp(i\boldsymbol{kx})$ 的漸近形。

1項是向 $\boldsymbol{k}$ 方向前进的平面波，第2項是表示由中心 O 向外扩散的球面波(关于这些波与入射波、散射波等对应的情况，在下面将会指出)。$f(\theta)$ 称为散射振幅。

現在我們用(2.12)代替(2.5)中的 $\exp(i\boldsymbol{kx})$,

$$\psi_0'(\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{k}\, a(\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}). \tag{2.13}$$

这样,(2.10)的解可写为

$$\psi'(\boldsymbol{x},t)=\int d\boldsymbol{k}\, a(\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\exp(-iE_{\boldsymbol{k}}t). \tag{2.14}$$

为了允許以(2.14)替代(2.6)式,就必須使在 $t=0$ 时,双方都表示同一波束,其証明如下。

在离散射中心充分远处,(2.14)与(2.6)的差为

$$\psi'(\boldsymbol{x},t)-\psi(\boldsymbol{x},t)\sim\left(\frac{f(\theta)}{r}\right)\int d\boldsymbol{k}\, a(\boldsymbol{k})\exp(ikr-iE_{\boldsymbol{k}}t).$$

同前,将 exp 的內含項在 $\boldsymbol{k}_0$ 的邻近展开,并限定到1次項为止,得

$$\psi'(x,t)-\psi(x,t)\sim\left(\frac{f(\theta)}{r}\right)\exp(ik_0r-iE_{\boldsymbol{k}_0}t)\,\varphi_0(0,0,r-v_0t). \tag{2.15}$$

右边的 φ_0 仅在 $r-v_0t\sim z_0$ 时具有較大的值,但限于 $r\sim R$,故在碰撞前的时間 $0\leqslant t\leqslant\dfrac{R}{v_0}$ 內,就沒有滿足如此条件的 t,从而只需考虑 $\psi'\sim\psi$.

現在我們就以(2.14)式来看一看散射后的情况。我們知道,(2.15)式仅是在 $r\sim R$ 的条件下得出来的,在时間上是沒有限制的,所以也可看作为散射后的漸近式。在相当于平面波的地方,我們应用(2.7)的結果,就得到

$$\psi'(\boldsymbol{x},t)\sim\exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}-iE_{\boldsymbol{k}_0}t)\,\varphi_0(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}_0t)$$
$$+\exp(ik_0r-iE_{\boldsymbol{k}_0}t)\left(\frac{f(\theta)}{r}\right)\varphi_0(0,0,r-v_0t). \tag{2.16}$$

其中第1项表示不散射而直进的入射粒子，第2项表示在时刻t，且仅在接近于$r=v_0t-|z_0|$时其值变大，并散射而扩展成球面状前进的散射粒子。粒子的密度与散射方向有关，并与$|f(\theta)|^2$成比例地分布，也就是說，当考虑的是在古典的一条軌道上时，一般就不能被表示出来。

为了求散射截面，就要計算通过图1.1所示之面积元dS的粒子数

$$r^2 d\omega \int dt \left(\frac{1}{2mi}\right)(\psi^* \partial_r \psi - \partial_r \psi^* \psi). \qquad (2.17)$$

其中ψ以(2.16)的散射部分代入（与前相同，須注意$\partial_r \varphi_0 \ll k_0 \varphi_0$）。当$r \to \infty$时，其有限項为

$$d\omega |f(\theta)|^2 \int dt |\psi_0(0, 0, r-v_0 t)|^2 v_0.$$

将它与(2.9)式入射粒子的单位面积平均密度相比，得微分截面为

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f(\theta)|^2, \qquad (2.18)$$

而总截面为

$$\sigma = \int d\omega |f(\theta)|^2 = 2\pi \int d\cos\theta |f(\theta)|^2. \qquad (2.19)$$

这就相当于古典理論中的(1.1)及(1.2)式。其实这样来計算截面，归根到底也就在于求散射振幅$f(\theta)$。故只需将(2.11)的Schrödinger方程附以(2.12)那种边界条件来解即可。这一点将在下节說明。

在这之前，先来闡明总散射截面σ的物理意义中的一种含义。即入射粒子束通过含有多个散射中心的物质层时[1]（物质层厚度以x度量之），設在x处之入射粒子数为$N(x)$，粒子在經历dx期間引起$N(x) n\sigma dx$次散射，并脱离粒子束。此处n是单位体积平

[1] 尽管散射中心离得相当远，但仍考虑其散射不引起干涉的情况。

均的散射中心数。从而 $dN=-Nn\sigma dx$. 取积分得

$$N(x)=N(0)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),$$

$$\lambda=\frac{1}{n\sigma}.$$

上式中,称 λ 为平均自由行程,即粒子碰撞一次时的平均前进距离。

在量子力学中,为了給出散射截面的定义,也有采用根据包含有时間的微扰論的跃迁概率来考虑的方法,这将在 §6 中闡明。

§3 散射振幅

在給定了势时,要准确地求得散射振幅,一般說来是較困难的。常用的近似方法有本节中将要叙述的基于逐次近似的微扰論方法和下节中讲述的分解部分波的方法。

首先我們从化(2.11)的微分方程为积分方程着手。将(2.11)改写为

$$(\Delta+k^2)\psi_k(\boldsymbol{x})=2mV(r)\psi_k(\boldsymbol{x}), \tag{3.1}$$

然后用电动力学中的势理論来类推。在已給出电荷分布 $\rho(\boldsymbol{x})$ 时,其势 $\varphi(x)$ 可以通过求解

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{x})=-4\pi\rho(\boldsymbol{x}) \tag{3.2}$$

而得到,即

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\int\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\rho(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'. \tag{3.3}$$

詳細說来,这个解是(3.2)的許多解中按下列边界条件:

$$r\to\infty\ \text{时}\qquad \varphi(\boldsymbol{x})\sim\frac{\text{const}}{r} \tag{3.4}$$

得出的。但 $\rho(\boldsymbol{x})$ 只是在从原点起的有限范圍内不为零。如果无此边界条件时,則可对(3.3)附加以任意的 $\Delta\varphi=0$ 的解。

現对(3.1)采用类似的解法。以 $\dfrac{\exp(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$ 代替 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$

时[1]，

$$\psi(\boldsymbol{x})=\int\frac{\exp(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left(-\frac{2m}{4\pi}\right)V(\boldsymbol{x}')\psi_k(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \quad (3.5)$$

满足 (3.1)，这可經代入后并作与(3.3)相同的計算而确定。此式当$r\to\infty$时的情况为分母取$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to r$，分子取$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to r-\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{r}+\cdots$，以及到第2項为止[2]的近似；

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim\left[\frac{\exp(ikr)}{r}\right]f(\theta), \quad (3.6)$$

$$f(\theta)=\left(-\frac{2m}{4\pi}\right)\int\exp(-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi_k(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'. \quad (3.7)$$

这里，可称$\boldsymbol{k}'=\frac{k\boldsymbol{x}}{r}$为散射后的动量。而 (3.7) 恰为散射波的渐近式。具有渐近式 (2.12) 的解可由对 (3.5) 附加上同阶方程$(\Delta+k^2)\varphi=0$的解$\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})$而求得，为

$$\psi_k(\boldsymbol{x})=\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})+\left(-\frac{2m}{4x}\right)\int\frac{\exp(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}V(\boldsymbol{x}')\psi_k(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'. \quad (3.8)$$

在此我們說它是解，还不如把它看作为与(3.1)的微分方程加上边界条件相等价的积分方程。因为在右边积分中仍含有$\psi_k(\boldsymbol{x}')$，故实际上并未解出来。

作为边界条件，上面取的是(3.6)的形式，但还有其他形式的条件，例如也可取为使散射波成为内向球面波

$$\psi(\boldsymbol{x})\sim\left[\frac{\exp(-ikr)}{r}\right]f(\theta) \quad (3.9)$$

这种形式的条件。此时，代替(3.8)的是

---

[1] 在数学上$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$或$\frac{\exp(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$都称为 Green 函数，参看本丛书《偏微分方程的应用》一书。

[2] 应注意$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$是緩慢地变化的，而$\exp(ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)$是剧烈地振动的。

$$\psi_k(\boldsymbol{x}) = \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}) + \left(-\frac{2m}{4\pi}\right)\int \frac{\exp(-ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} V(\boldsymbol{x}')\psi_k(\boldsymbol{x}'). \quad (3.10)$$

对于无边界条件时的一般解，(3.8)与(3.10)就一致了。

由于 (3.8) 是解 $\psi_k(x)$ 的一种形式，若和微分方程比較，容易考虑到采用近似解法。例如，若能将势 $\psi_k(x)$ 看作为一級无穷小，那末，(3.8) 式右边的第 2 項中的 $\psi_k(x)$ 只需置换为 0 級近似的 $\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})$ 卽可。令此时的散射振幅为 $f^{(1)}(\theta)$，則由

$$f^{(1)}(\theta) = -\left(\frac{2m}{4\pi}\right)\int \exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}']V(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \quad (3.11)$$

計算积分就可得到，称这种近似为 Born 近似。在 Born 近似中，散射振幅与势函数的 Fourier 变换成比例，如同图 3.1(a)，在作 $V(\boldsymbol{x}')$ 与波 $\exp[i(k-k')x]$ 相重合的情况下，可确定出 $f(\theta)$。

現举几个例子来計算(3.11)。

例 1 在势井(1.3)的情况下，

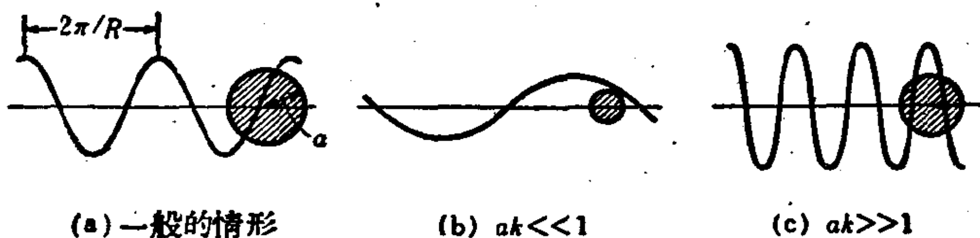
$$f^{(1)}(\theta) = -\left(\frac{2mV_0}{K^3}\right)[-(aK)\cos aK + \sin aK], \quad (3.12)$$

$$K = |\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}| = 2k\sin\frac{\theta}{2}.$$

考虑两个极限的情形：

(1) 入射粒子极为緩慢的場合 $ak \ll 1$ (图 3.1(b))，其 de Broglie 波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ 比靶的大小要大得多。展开(3.12)的三角函数时，得知

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{mV_0a^3}{3}, \quad (3.13)$$



(a) 一般的情形 (b) $ak \ll 1$ (c) $ak \gg 1$

图 3.1

故散射是各向相同地发生的。这与(3.11)中設 $\exp[i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}]\to 1$ 是同一回事。但須注意在排斥力时 $f<0$，而吸引力时 $f\gtrsim 0$。

(2) 入射粒子极为迅速的場合 $ak\gg 1$(图 3.1(c))，其 de Broglie 波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ 比靶的大小要小得多。这时 $f^{(1)}$ 随角度的不同发生复杂的变化。特别是在其前方会产生衍射阴影。当 θ 較小时，$K\sim k\theta$ 的 f 就与

$$\frac{[\sin ak\theta-(ak\theta)\cos(ak\theta)]}{(k\theta)^3}$$

成比例，而当 $\theta=0$ 时成为最大，第一极小为 $ak\theta=\alpha_0$，其中 α_0 是

$$\frac{(\sin x-x\cos x)}{x^3}$$

的最小的零点，即 $\alpha_0=4.5$。

例 2 Coulomb 势 $V=\frac{z_1z_2e^2}{r}$。

此时，角积分可以表为

$$f^{(1)}(\theta)=-\left(\frac{2mz_1z_2e^2}{K}\right)\int_0^\infty \sin Kr dr,$$

而关于 r 的积分则为发散。如同在 §1 中所讲过的，作为实际問題来看，在到 $r\to\infty$ 时仍設想为 Coulomb 势是不合实际的，而在远处必定更要小得多。为表明上述情况，設

$$V=z_1z_2e^2\exp\frac{\left(-\frac{r}{r_1}\right)}{r},$$

积分就成为

$$\int_0^\infty \sin Kr dr\to\int_0^\infty \exp\left(-\frac{r}{r_1}\right)\sin Kr dr=\frac{K}{K^2+r_1^{-2}},$$

当 $K\gg r_1^{-1}$ 时(限定考慮 k，θ 充分小的值)，

$$f^{(1)}(\theta)=-\frac{2mz_1z_2e^2}{K^2}=-\frac{c}{2}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

其中

$$c=\frac{z_1z_2e^2}{mv^2},$$

于是其微分截面与古典力学中的值(1.12)相合。

問題 求湯川势

$$V=V_1\exp\frac{-\mu r}{\mu r} \tag{3.14}$$

时的截面，并証明若要給出与 $k\to 0$ 时的势并有相同的截面，取

$$V_1\mu^{-3}=\frac{V_0a^3}{3}$$

即可。

这样的 Born 近似，一般說来，入射粒子都是較快的，故很容易想到在其势能比动能較小时，能更易作出近似，但事实并非都是如此。那末，“何时作 Born 近似較好呢？”这是一个复杂的問題，在此我們不再多談了❶。

§4 使用分波法

解 Schrödinger 方程(2.12)的另一有效方法，就是依据部分波分解(partial wave analysis)的方法。这种考虑是比較簡便的，例如求氫原子的能級时，就应用了把波函数按角动量的本征函数来展开的方法。

对于氫原子，用球坐标(r, θ, φ)来表示 Schrödinger 方程和波函数，且求 $\psi(r, \theta, \varphi)=R(r)Y(\theta, \varphi)$ 型的解时，$Y(\theta, \varphi)$ 可取为角动量 L 的大小 L^2 及 z 方向分量 L_z 的共同本征函数 Y_{lm}❷。即 $Y=Y_{lm}$ 满足

$$\left.\begin{aligned} L^2Y_{lm}&=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]Y_{lm}=l(l+1)Y_{lm},\\ L_zY_{lm}&=(-i)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_{lm}=mY_{lm}, \end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

并被規格正交化。

$$\iint Y_{lm}^*(\theta, \varphi)Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\delta_{ee'}\delta_{mm'},\tag{4.2}$$

---

❶ 参看 Mott & Massey: Theory of Atomic Collisions (1949)(有中譯本); W. Kohn: Rev. Mod. Phys., **26** (1954), 292.

❷ 关于角动量，参看本丛书《回轉群与对称群的应用》一书。

更明显些，即

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$=\frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)}\right]^{\frac{1}{2}}\sin\theta\frac{d^{l+m}\sin^{2l}\theta}{d\cos^{l+m}\theta}\exp(im\varphi), \quad (4.3)$$

$$Y_{l,-m}=(-1)^m Y_{lm}^*. \quad (4.4)$$

上式中 l, m 是 L^2, L_z 的本征值，而 Y_{lm} 又称为球函数。由于原子光譜的关系，$l=0, 1, 2, \cdots$ 又分别各取为 s, p, d,…. 对应于 s, p 的球函数是

$$Y_{0,0}=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

$$Y_{1,0}=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta,\ Y_{1,1}=-\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\exp(i\varphi).$$

在散射問題中，要想把解写成 $\psi=R\cdot Y$ 的形式是办不到的，这从 $r\to\infty$ 时的漸近式 (2.12) 就可知道。一般用不同的 l, m 合在一起来表示。 或者把 ψ_k 作为 (θ, φ) 的函数，用球函数 Y_{lm} 展开亦可。在具中心力时，ψ_k 不包含 φ，用 Legendre 函数 $P_l(\cos\theta)=\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{\frac{1}{2}}Y_{l0}$ 展开得

$$\psi_k=\sum_l R_l(r)P_l(\cos\theta), \quad (4.6)$$

其中，R_l 满足微分方程

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}+k^2-2mV(r)\right\}R_l(r)=0. \quad (4.7)$$

所以，最初的 Schrödinger 方程就归結为有关各个部分波的常微分方程。这是 2 阶的常微分方程，可附加两个边界条件。一个是当 $r=0$ 时 R_l 为有限值；或为 $(r\cdot R_l)_{r=0}=0$，另一个就是后来所述的 $r\to\infty$ 时的条件。

現将 §1 中例 1 有关势井的 S 波問題作为例子来試解。

在$(rR_0)_{r=0}=0$的条件下，求解

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2-2mV\right)(rR_0)=0,$$

当$r>a$时，

$$R_0=\frac{[A^+\exp(ikr)+A^-\exp(-ikr)]}{r}, \tag{4.8}$$

当$r<a$时，

$$R_0=C\sin k'r,\quad k'^2=k^2-2mV_0. \tag{4.9}$$

但須設$\frac{k^2}{2m}\geqslant V_0$。将(4.8)与(4.9)在$r=a$处光滑地連結起来[1]，就得

$$ik\frac{A^+\exp(ika)-A^-\exp(-ika)}{A^+\exp(ika)+A^-\exp(ika)}=k'\cot k'a. \tag{4.10}$$

按$\frac{A^+}{A^-}$求解，得知$|A^+|=|A^-|$，若設$A^{\pm}=\left(\frac{\pm A_0}{2i}\right)\exp(\pm i\delta_0)$，(4.10)成为

$$k\cot(ka+\delta_0)=k'\cot ak', \tag{4.11}$$

由上式就能确定δ_0，这里A_0是不定的。而$r>a$之解为

$$R_0=\left(\frac{A_0}{r}\right)\sin(kr+\delta_0). \tag{4.12}$$

因此，在普遍的場合下，返回到(4.7)要用一般方法求解是不成的，如果能够求得解，我們就来考慮由这个解来求散射振幅$f(\theta)$。为此，比較f的定義式(2.12)及(4.6)的漸近式即可。这对(4.6)說来就是附加上$r\to\infty$的边界条件。(4.6)在$r\to\infty$时的漸近式可从(4.7)中略去势及$\frac{l(l+1)}{r^2}$的离心力而得出，它具有下列形

---

[1] 即表示R_0及$\frac{dR_0}{dr}$在$r=a$处是連續的。对于$\frac{dR_0}{dr}$，在近$r=a$处势是連續的，而在变化极其剧烈的場合下，将Schrödinger方程在这个較狹小的寬度范圍內积分，再令其寬度趋于零即得。

式❶：

$$R_l \sim \frac{(A_l^+ \exp(ikr) + A_l^- \exp(-ikr)}{r}. \tag{4.13}$$

当

$$|A_l^+| = |A_l^-| \tag{4.14}$$

并令 $A_l^{\pm} = \left(\frac{\pm A_l}{2i}\right) \exp(\pm i\delta_l')$ 时，有

$$R_l \sim \left(\frac{A_l}{r}\right) \sin(kr + \delta_l'). \tag{4.15}$$

(4.14)的証明如下。(4.7)是实系数的微分方程，$(rR_l)_{r=0} = 0$ 是实的边界条件，故能求出实数解。即将(4.13)乘以适当常数便可求得，于是就証明了(4.14)。同时，这两个积分常数可这样来确定：δ_l' 用 $r=0$ 的边界条件确定，A_l 以 $r \to \infty$ 的条件确定。

因而，(4.6)的渐近式成为

$$\psi_k \sim r^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \sin(kr + \delta_l') P_l(\cos\theta). \tag{4.16}$$

現将(2.12)分解为部分波来求其渐近式。我們利用关于平面波的公式❷

$$\exp(ikx) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta), \tag{4.17}$$

$$j_l(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(x). \tag{4.18}$$ ❸

当 $x \to \infty$ 时，就有

$$j_l(x) \sim x^{-1} \sin\left(x - \frac{l\pi}{2}\right), \tag{4.19}$$

$$\exp(ikx) \sim (kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos\theta). \tag{4.20}$$

---

❶ 但必须 $V(r)$ 在 $r \to \infty$ 时比 $\frac{1}{r}$ 更快地趋近于0。

❷ 参看本丛书《特殊函数》一书。

❸ 特别是 $j_0(x) = x^{-1} \sin x$，$j_1(x) = x^{-2} \sin x - x^{-1} \cos x$。

另一方面,将散射振幅用 $P_l(\cos\theta)$ 展开,得

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}f_lP_l(\cos\theta), \tag{4.21}$$

并比较(4.20) + (4.21) $\times\dfrac{\exp(ikr)}{r}$ 与 (4.16) 中 P_l $(\cos\theta)$ 的系数,得

$$k^{-1}(2l+1)i^l\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right)+f_l\exp(ikr)=A_l\sin(kr+\delta_l').$$

再比较 $\exp(ikr)$ 与 $\exp(-ikr)$ 的系数,得

$$f_l=(2ik)^{-1}(2l+1)[\exp(2i\delta_l)-1], \tag{4.22}$$

$$kA_l=(2l+1)\exp\left[i\left(\delta_l+\frac{\pi l}{2}\right)\right], \tag{4.23}$$

其中

$$\delta_l=\delta_l'+\frac{\pi l}{2}. \tag{4.24}$$

从而散射振幅为

$$f(\theta)=(2ik)^{-1}\sum_l(2l+1)[\exp(2i\delta_l)-1]P_l(\cos\theta), \tag{4.25}$$

这里仅用 δ_l 表示而没有涉及 A_l。ψ_k 的渐近式为

$$\psi_k\sim(kr)^{-1}\sum(2l+1)i^l\exp(i\delta_l)\sin\left(kr+\delta_l-\frac{l\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta). \tag{4.26}$$

(4.24),(4.15)中所定义的 δ_l 称为周相移 (phase shift)。其理由是:比较一下平面波的渐近形 (4.20) 与散射解 ψ_k 的渐近式 (4.26) 就可看出,sin 的周相恰好移动了 δ_l。也可以象下面那样解释(就 S 波来說明)。将入射的平面波分解为球面波,相当于 $l=0$ 的部分,根据(4.17),(4.18)为

$$(kr)^{-1}\sin kr=(2ikr)^{-1}[\exp(ikr)-\exp(-ikr)], \tag{4.27}$$

即外向及內向球面波迭合,在不散射时,可以說成是将內向球面波直接換成外向球面波而被发送出来。散射解 ψ_k 的 S 波部分由

(4.26)得知为

$$(kr)^{-1}\exp(i\delta_0)\sin(kr+\delta_0)$$
$$=(2ikr)^{-1}[\exp(2i\delta_0)\exp(ikr)-\exp(-ikr)],\quad(4.28)$$

与(4.27)相比較，在內向球面波变成为外向球面波时，其散射只移动了 $2\delta_0$ 的周相。在 $l\neq0$ 时，波的情况也同样。

如果 $f(\theta)$ 也能象(4.25)那样用部分波展开的形式表出，便可立即算得总截面❶

$$\sigma=4\pi k^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l.\quad(4.29)$$

由此可知在各个子波上的截面都满足关系 $\sigma_l\leqslant4\pi(2l+1)k^{-2}$，并具有理論上的上限，这对于与实驗相比較是有益的。

問題1 (4.22)，(4.23)是用外向散射波得出的，而用內向球面波时为

$$f_l'=-(2ik)^{-l}(-1)^l[\exp(2i\delta_l)-1],\quad(4.22')$$

$$kA_l'=(2l+1)\exp\left[-i\left(\delta_l+\pi\frac{1}{2}\right)\right],\quad(4.23')$$

試証散射波的漸近式为

$$\psi_k'\sim(kr)^{-1}\sum(2l+1)i^{-l}\exp(-i\delta_l)\sin\left(kr+\delta_l-\frac{l\pi}{2}\right)P_l(\cos\theta)\sim\psi_{k^*}.\ (4.26')$$

問題2 試証距散射中心充分远处球面上的粒子流用(4.6)，(4.13)来計算时，得

$$\int r^2d\cos\theta d\varphi\left(\frac{1}{2im}\right)(\psi^*\partial_r\psi-\partial_r\psi^*\psi)$$
$$=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^{-1}(|A_l^+|^2-|A_l^-|^2),\quad(4.30)$$

并确定若(4.14)成立，則粒子不随散射增減。

§5 例　　題

我們知道求散射振幅 f 可归結为求周相移 δ_l，但尙未有求 δ_l

---

❶ $\int_0^{\pi}P_l(\cos\theta)P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{\delta_{ll'}2}{2l+1}$.

的一般方法。下面就几个具体例子来求 δ_l,并推論其一般的性质。

例1　剛球上的散射　古典力学中总截面为 $\sigma=\pi a^2$，而在量子理論中又将是怎样呢？我們知道对于剛球，在球的內部即 $r<a$ 时，$\psi=0$．这可把剛球当作势井 $V_0\to\infty$ 时的极限情况来考虑。例如，就 S 波考虑时，相当于(4.11)的是

$$k\cot(ak+\delta_0)=k'\coth ak', \tag{5.1}$$

但又有

$$k'^2=2mV_0-k^2, \tag{5.2}$$

在 $V_0\to\infty$，永远有 $k'\to\infty$，故

$$\delta_0=-ak. \tag{5.3}$$

在 $r<a$ 时的波函数为 $\psi_{内}=A\sinh ak'$，令外部波函数的振幅为1时，則由于在 $r=a$ 处能連續衡接，故成立 $A\sinh ak'=\sin(ak+\delta_0)$，当 $k'\to\infty$ 时，$A\to 0$，从而 $\psi_{内}=0$．对于 $l\geqslant 1$ 的情形也类似。

在 $r\leqslant a$ 时，$l\geqslant 1$ 的波函数 $R_l=0$，而在 $r\geqslant a$ 时，$l\geqslant 1$ 的波函数为

$$R_l=B_l[j_l(kr)n_l(ka)-n_l(kr)j_l(ka)]. \tag{5.4}$$

这里

$$n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(x). \tag{5.5}$$ ❶

在 $x\to\infty$ 时，它成为

$$n_l(x)\sim -x^{-1}\cos\left[x-\frac{l\pi}{2}\right]. \tag{5.6}$$

将所求得的(5.4)的漸近式与(4.15)比較就可知

$$\tan\delta_l=\frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}. \tag{5.7}$$

而在一般情形下是难以得到的，因此我們来考虑入射粒子較緩慢时 $ka\ll 1$ 及較快时 $ka\gg 1$ 的情况。

(1)　$ka\ll 1$ 的情况　利用 $x\to 0$ 时的漸近式

$$j_l(x)\sim\frac{x^l}{1\cdot 3\cdots(2l+1)}, \tag{5.8}$$

$$n_l(x)\sim -1\cdot 3\cdots\frac{(2l+1)}{x^{l+1}}$$

---

❶ $n_0(x)=-x^{-1}\cos x$，$n_1(x)=-x^{-2}\cos x-x^{-1}\sin x$.

得

$$\tan\delta_l \sim \delta_l \sim -\frac{(ka)^{2l+1}}{[1\cdot 3^2\cdots(2l-1)^2(2l+1)]}. \tag{5.9}$$

按照 $l=0, 1, \cdots$, δ_l 是急速变小的，我們只取 $l=0$ 作为第1近似时，得

$$\sigma = 4\pi a^2, \tag{5.10}$$

結果是古典值的4倍，这是因为波长 $\frac{2\pi}{k}$ 比靶的大小 a 要大得多，并且衍射效果較强之故。

(2) $ka \gg 1$ 时，把 l 以 $l_0 = ka$ 作为界限分开，对于 $0 \leqq l \leqq ka$，用(4.19)，(5.6)的近似式求 $\delta_l = -ka - \frac{l\pi}{2}$，計算得

$$\sum_{l=0}^{l_0} \sigma_l \sim 4\pi k^{-2} \int_0^{ka} (2x+1) \sin^2\left(\frac{ka - x\pi}{2}\right) dx \sim 2\pi a^2.$$

对于 $l > ka$，用(1)的近似时❶，与上面的值相比較易知它是可以被忽略的，

$$\sigma \cong 2\pi a^2 \tag{5.11}$$

是古典值的2倍❷。当能量較大时，我們可以将波束縮小，看起来古典的近似是不坏的，而这种不一致，仍然在于衍射效果。在古典力学中能呈現出非常明显的阴影，其截面为 πa^2，但在量子力学中，在靶的后面，环繞以衍射效果，相当于在离靶十分远处，附加了一个恰好等于靶的大小 πa^2 的散射。

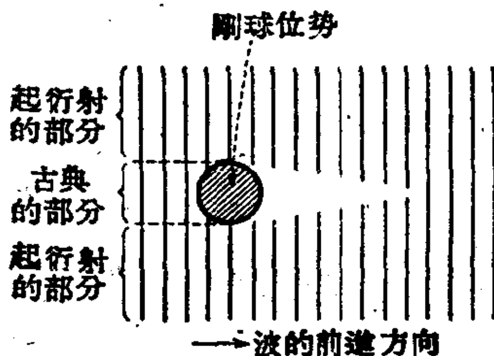


图 5.1

例2 势井 这里討論以吸引力 $V_0 < 0$ 为限。首先从 S 波的問題开始。已知确定 δ_0 的式子为(4.11)，(4.9)，以 $\exp(2i\delta_0)$ 来解时，得知

$$\exp(2i\delta_0) = [\exp(-2ika)] \frac{(f + ika)}{(f - ika)}, \tag{5.12}$$

$$f = k'a \cot k'a. \tag{5.13}$$ ❸

---

❶ 应注意(5.8)式在不滿足 $x \ll 1$，而 $l \gg x$ 时亦成立。

❷ 为求出此式，实际上，上面的討論并不充分，还須作繁杂的計算，但結果是相同的。參看 Schiff: Quantum Mechanics, p. 111 及 Watson: Bessel Functions, Chap. VIII.

❸ f 是內部波函数的对数微分在靶表面上的值，在核反应理論中，經常用它来表示核的內部状况的总和。

下面我們主要考虑入射粒子是緩慢的，即 $ka \ll 1$ 时的情况。f 是 k 的偶函数，在 ka 处展开得

$$f=f_0+f_1(ka)^2+\cdots.$$

(1) $f_0 \neq 0$ 的情况

$$\exp(2i\delta_0)=1-2ika(1-f_0^{-1})+\cdots,$$

$$\therefore \quad \delta_0=-ka(1-f_0^{-1})+\cdots, \tag{5.14}$$

δ_0 是从 k 的一次函数开始的，

$$\sigma^{(0)}=4\pi k^{-2}\sin^2\delta_0=4\pi a^2(1-f_0^{-1})^2, \tag{5.15}$$

上式中，f_0 只是 V_0a^2 的函数。当 $f_0=1$ 时，在此所作近似中 $\sigma^{(0)}=0$. 一般，在任意势的 l 波中，$\delta_l=n\pi$, $\sin\delta_l=0$, $\sigma^{(l)}=0$ 时会引起 Ramsauer 效应。在現在这种場合，例如当 $\frac{|V_0|=(4.5)^2}{2ma^2}$ 时就会发生。作为实例，当我們用慢速电子冲击稀有气体原子时，就能观测到 Ramsauer 效应。

(2) $f_0=0$ 的情况

$$\exp(2i\delta_0)=(-1)[1-2ika(1+f_1)+\cdots],$$

$$\therefore \quad \delta_0=\frac{\pi}{2}-ka(1+f_1)+\cdots,$$

取 $k\to 0$ 的极限得 $\delta=\frac{\pi}{2}$. 截面

$$\sigma^{(0)}=4\pi k^{-2} \tag{5.16}$$

达到了所确定的能量的上限。一般說来，周相移为 $\frac{\pi}{2}$ 时，子截面成为最大而产生共振。在現在这种情况下，当势为

$$|V_0|=W_n\equiv\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{2ma^2},\ n=0,1,\cdots$$

时产生共振。設 a 为一定，把 $|V_0|$ 作逐步进替时，在 $|V_0|=W_n$ 时出現一个个的束縛級，故共振与束縛級的存在有关。这不仅限于在势井时，对一般情况也都成立，在此就不再討論了。

其次，我們来考虑 P 波。势的外解与內解，用球 Bessel 函数 j_1, n_1（实际即三角函数）表示时，为

$$\psi_{外}=\cos\delta_1 j_1(kr)-\sin\delta_1 n_1(kr), \tag{5.17}$$

$$\psi_{內}=Cj_1(k'r). \tag{5.18}$$

将(5.17)規格化，于是，当 $r\to\infty$ 时，$\psi_{外}\sim(kr)^{-1}\sin\left(kr+\delta_1-\frac{\pi}{2}\right)$.

把在 $r=a$ 时光滑地衔接的式子就 $\exp(2i\delta_1)$ 解出时，

$$\exp(2i\delta_1)=\exp(-2ika)\left(\frac{1+ika}{1-ika}\right)\cdot\left(\frac{f-\Delta+i\delta}{f-\Delta-i\delta}\right), \tag{5.19}$$

这里

$$f=\frac{k'aj_1'(k'a)}{j_1(ka)}, \tag{5.20}$$

$$\Delta+i\delta=\frac{(ka)[j_1'(ka)+in_1'(ka)]}{[j_1(ka)+in_1(ka)]}.$$

Δ，S 当 $x=ka$ 时，由

$$\Delta(x)=-\frac{2+x^2}{1+x},\ S=\frac{2x^3}{1+x^2} \tag{5.21}$$

来計算。与前相同，当 $ka\ll1$ 时，用 $f\sim f_0+f_1(ka)^2+\cdots$ 展开得 $(f_0+2\neq0)$

$$\delta_1\sim2\left[(f_0+2)^{-1}-\frac{2}{3}\right](ka)^3+\cdots. \tag{5.22}$$

(5.14)，(5.22) 的結果是对任意 l 的普遍式，故当 $ka\ll1$ 时，得知

$$\delta_l\sim\text{const}\,(ka)^{2l+1}. \tag{5.23}$$

从而 $\delta_0\gg\delta_1\gg\delta_2\gg\cdots$，于是其截面仅在 l 的較小值处才易作出近似。

关于緩慢时截面只能以較小的 l 值上的 δ_l 才能表示出来这一点，不仅限于势井，即对于作用半徑是有限的势也成立。用古典力学对应論的观点来看，对于碰撞参数 b，按 $bk=l$ 时的角动量关系，在 $b\gg a$ 时不能发生碰撞，故对 $l\gg ak$ 时的 l 就不能求得其截面。

例 3 Born 近似中的 δ_l　在給出 Born 近似的振幅 (3.10) 中，把势当作中心力来作角积分时，我們得到

$$f^{(1)}(\theta)=-2m\int_0^\infty dr\,rV(r)\sin\frac{Kr}{K}, \tag{5.24}$$

$$K=|k'-k|$$

利用公式

$$\frac{\sin(Kr)}{Kr}=\sum_{l=0}^\infty(2l+1)P_l(\cos\theta)[j_l(r)]^2 \tag{5.25}$$

将 (5.24) 用 $P_l(\cos\theta)$ 展开，得

$$f^{(1)}(\theta)=-2m\sum(2l+1)\left[\int_0^\infty dr\,r^2V(r)j_l^2(r)\right]P_l(\cos\theta).$$

将此与 (4.25) 相比較。Born 近似之所以成立是因为 V 較小时 δ_l 也較小。若令 $\exp(2i\delta_l)\sim1+2i\delta_l$，则得用 Born 近似所求之 δ_l 式

$$\delta_l \sim -2mk\int_0^\infty dr\, r^2 V(r)\, j_l^2(r). \tag{5.26}$$

由于在 Born 近似时，$\delta_l \ll 1$，故可知在共振的情况下是不好用 Born 近似的。

例 4 能准确求解之場合　对于 Coulomb 势我們已用 Born 近似来处理过，但实际上能够求出其准确解。此外，若限于 S 波时，对于指数型 $V=V_0\exp(-\alpha r)$ 或 Hulthén 型 $V=\frac{V_0\exp(-\alpha r)}{[1-\exp(-\alpha r)]}$ 也都可求得其解析解，并有可能来代替用解析方法难以处理的湯川型势 $\frac{C\exp(-\alpha r)}{r}$，但我們在这里不再作深入討論了。

§6 散射的另一个定式化

为了要在量子力学中处理散射問題，我們已在§2中用波束与古典力学对应地考虑过，但这个問題又可用量子力学中跃迁概率来加以公式化。所謂跃迁概率是这样的：例如氫原子中电子在較高能級 a 上发光后降落到較低能級 $b, c, \cdots$ 上，这时 $a\to b, a\to c, \cdots$ 的跃迁速度是一定的，称其在单位时間上的平均值为跃迁概率。在理論上，这种跃迁是电子与电磁場的光子相互作用所引起的，其跃迁概率可用量子力学中的微扰論来計算。

現将这种考虑方法应用到散射問題中，設想初态为动量 $\boldsymbol{k}_0$ 的入射粒子的态，末态为动量 $\boldsymbol{k}$ 的散射粒子的态，$\boldsymbol{k}_0\to\boldsymbol{k}$ 的跃迁是由势能所引起，而向各种 $\boldsymbol{k}$ 的跃迁概率可以考虑成为与其同方向的微分散射截面成比例。为了熟习微扰理論，我們先来闡述它的計算。

設初始时間为 0，表示初态的波函数为

$$\phi_{\boldsymbol{k}_0}=\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\right)\exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}), \tag{6.1}$$

其中 Ω 是为了在十分大时使其規格化的体积。当 $t=0$ 时，以 $\phi_{\boldsymbol{k}_0}$ 出发的波函数 $\psi(t)$ 是随 Schrödinger 方程(2.10)而变化的，現将 $\psi(t)$ 用 H_0 的本征函数的平面波

$$\phi_k=\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}}\right)\exp(i\boldsymbol{kx}) \tag{6.2}$$

展开

$$\psi(t)=\sum_k a_k(t)\phi_k(\boldsymbol{x})\exp(-iE_kt), \tag{6.3}$$

于是轉成为考虑 $a_k(t)$ 的变化了。$|a_k(t)|^2$ 是时刻 t 时处于状态 $\boldsymbol{k}$ 的概率，$a_k(t)$ 所表的初始条件为

$$a_{k_0}(0)=1,\quad a_k(0)=0,\quad \boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}_0. \tag{6.4}$$

把(6.2)代入(2.10)，比較 $\phi_k(x)$ 的系数，得

$$\frac{i\partial a_k}{\partial t}=\sum_{k'}V_{kk'}a_{k'}\exp[-i(E_{k'}-E_k)t], \tag{6.5}$$

$$V_{kk'}=\int\phi_k^*(x)V(x)\phi_{k'}(x)dx$$

$$=\left(\frac{1}{\Omega}\right)\int V(x)\exp[-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}]d\boldsymbol{x}. \tag{6.6}$$

把展开式(6.3)的系数分为 $a_k(t)$ 与 $\exp(-iE_kt)$，是为了使(6.5)式能得到簡化。

为求解(6.5)，我們来考虑与§3的精神相同的近似。也就是說，把引起跃迁的 V 考虑为一級无穷小，求(6.4)的 a_k 值的1次位移。(6.5)式右边的 a_k 用(6.4)的值代入，对时間进行积分，在 $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}_0$ 时，求得

$$|a_k(t)^2|=|V_{kk_0}|^2 4\sin^2\frac{\frac{(E_k-E_{k_0})t}{2}}{(E_{k_0}-E_k)^2}, \tag{6.7}$$

上式說明 $|a_k(t)|^2$ 在接近 $E_k=E'_{k_0}$ 时达到极大值，而在离开 $E_k=E'_{k_0}$ 时，就迅速变小，且当 t 愈大时，变小得愈快，而 E_k 的寬度大致可由 $\Delta E\cdot t\simeq1$ 給出。通常 t 是十分大的，而我們所以能观測到是由于把几乎为 E_{k_0} 的能量全部加在一起的結果，于是留下来的問題是把(6.7)按如是之能量范圍相加起来。

由于 $d\boldsymbol{k}$ 范圍内态的数目是 $\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\right]d\boldsymbol{k}$，从而利用 $E_k=\frac{k^2}{2m}$，可得

$$\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\right]d\boldsymbol{k}=\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\right]mk\cdot d\omega_k\cdot dE_k, \tag{6.8}$$

$d\omega_k$ 是 $\boldsymbol{k}$ 方向的立体角，于是在 $d\omega_k$ 方向的态的跃迁概率为

$$t^{-1}\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\right]mkd\omega_k\int_0^\infty dE_k k|a_k|^2$$

$$=t^{-1}\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\right]mkd\omega_k|V_{kk_0}|^2\int_0^\infty dE_k 4\sin^2\frac{\frac{(E_k-E_{k_0})t}{2}}{(E_k-E_{k_0})^2}$$

$$=\left[\frac{\Omega}{(2\pi)^2}\right]mkd\omega_k|V_{kk_0}|^2 \tag{6.9}$$

注意在这里已应用了 $|V_{kk_0}|^2$ 是 k 的緩慢的函数，又积分的下限也可取为 $-\infty$ ❶。

在求微分截面时，由 (6.1) 所表示的入射粒子对 Ω 說来是1个，但对于单位时間、单位面积說来就不是1个，为此只需乘以 $\frac{\Omega}{v_0}=\frac{\Omega m}{k_0}$ 即可。因为 $k=k_0$，故从 (6.9) 再用 (6.6) 式得知微分截面为

$$d\sigma=\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2\left|\int V(x)\exp[-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}]d\boldsymbol{x}\right|^2 d\omega_k, \tag{6.10}$$

这与§3中用 Born 近似的振幅 (3.11) 求得之截面除記号不同 $(k\to k_0,\ k'\to k)$ 之外，是完全一致的。

由此可見，从跃迁概率的角度也能将散射問題作量子力学的定式化。但須注意下列三点：

1° 对于初态和末态，我們都使用了扩散成为十分大的空間 Ω 的平面波，而真实的粒子在时間的起点和終点都是空間为有限的

❶ 注意 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\sin^2 xt}{x^2}=\pi t$.

扩散，因此必須用波束来表示。于是必需要有一个能用平面波来代替的保証。

2° 为求解方程(6.5)，在逐次近似中我們只取到第1項，故証据并不充分，于是必需要知道再继續进行逐次近似时的情况，但这下一步的計算却是很麻煩的。

3° 此二个定式化中的截面，在Born近似范圍內都是一致的，但在完整的解开时，它們也是相同的这一点，在数学上还不自明，須要加以証明。

有关此三点，将在第3章內处理。

第2章　定常的处理方法

本章是以势散射为范例来闡述更一般的散射問題。所謂定式化就是指 §2 的定常处理方法与 §6 的非定常处理方法，在这里我們仅論述前者，而把后者放在第3章中說明。定常方法的数学步驟就是解出定态的 Schrödinger 方程 (2.11)，再求满足 (2.12) 漸近条件的解，并应用由此求得的振幅 f 来計算截面。但当所处理的物理体系較复杂时，Hamiltonian 也就要复杂些。下面，我們将在 §7 中說明实际存在的一些例子，在 §8，§9 中则不以求一个个复杂問題的具体解为目标，而专門討論解的普遍形式以及由此导出的一些性质。

§7　散射問題的实例

到目前为止，我們所处理的只是一个粒子的势散射情况，但实际上尚存在着更复杂的散射問題。現举数例于下。

例1　二个粒子碰撞时的情况　如电子与质子的碰撞或质子与中子的碰撞等，若它們間的相互作用以势表示，那末在分离其重心运动及相对运动后，就可把它归結为一个粒子的势散射的情况。

現在說明不具有相对論效果时的情况。

設 Schrödinger 方程为

$$\left\{\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+V(x_1-x_2)\right\}\psi(x_1x_2)=W\psi(x_1x_2)。\tag{7.1}$$

这是最常見的表达式。其重心坐标 X 及相对坐标 x 与古典力学中的相同：

$$\mathbf{X}=\frac{(m_1x_1+m_2x_2)}{(m_1+m_2)},\qquad x=x_1-x_2,\tag{7.2}$$

古典力学中的动能为

$$\frac{(m_1\dot{x}_1^2+m_2\dot{x}_2^2)}{2}=\frac{(M\dot{X}^2+\mu\dot{x}^2)}{2},\tag{7.3}$$

其中 $M=m_1+m_2$, $\mu^{-1}=m_1^{-1}+m_2^{-2}$. 从而与 $\mathbf{X}$ 和 x 相对应的动量为

$$P=M\dot{X}=P_1+P_2,\qquad p=\mu\dot{x}=\frac{(m_2P_1-m_2P_2)}{M}. \tag{7.4}$$

把波函数及能量分成为

$$\psi(x_1, x_2)=\psi(\mathbf{X}, x)=e^{iP\mathbf{X}}\psi(x),$$

$$W=\frac{P^2}{2M+E}, \tag{7.5}$$

于是,得到表示相对运动的 $\psi(x)$ 的方程为

$$\left(\frac{p^2}{2\mu+V(x)}\right)\psi(x)=E\psi(x), \tag{7.6}$$

因而也就成为一体問題了。所謂势散射也就是上面所处理的二体的相对运动,或者是对此二体来說,其靶十分重而在被碰撞时几乎不动的情况。

若整个体系的重心是静止的,則 $P=0$.

例 2 具有結构的靶——多个散射中心时的情况 例如电子碰撞原子及中子碰撞原子核时,入射粒子与靶的相互作用,在多数情况下,都能写成为入射粒子与靶中各个散射中心 i 的相互作用之和,即

$$V=\sum V_i. \tag{7.7}$$

例 3 与例 2 相同,但以靶内部运动作为問題对象时的情况 例如中子碰撞原子核而使核受激分裂成其他核,即所謂核反应的場合,这时的 Hamiltonian 是由三个部分組成:

$$H=H_1+H_2+V. \tag{7.8}$$

H_1 是入射粒子的动能,H_2 是靶的 Hamiltonian, 包含組成靶的粒子組的动能及位能,V 是靶与入射粒子之間的相互作用能,与例 2 的 (7.7) 相同。

例 4 入射粒子本身也具有构造的情况 例如 α 粒子(由两个中子和两个质子构成的)碰撞原子核时,与上例相同,Hamilto nian分成为三部分。H_1 是含有入射粒子內部构造的 Hamiltonian, V 是由入射粒子內的各个粒子 i 及靶的各个粒子 r 的相互作用之和

$$V=\sum V_{ir}. \tag{7.9}$$

例 3, 例 4 均可分成为入射粒子与靶的重心运动及相对运动如下。先将 H_1, H_2 分为各重心运动 K_1, K_2 及內部运动 H_1', H_2'; $H_i=K_i+H_i'$. 其次,就 K_1, K_2 作与例 1 相同的分离,相对运动的动能与一体时相同。而整个的重心

系成为 $H_0=H_1+H_2=H'_1+H'_2+K$ (相对运动)。此为二体碰撞的普遍情况，例1～3皆为其特例。

例5 場論中的散射問題(将在第5章中闡述)。

如上所見，实际出現的散射問題是多种多样的。但是，不論在那种情况下，Hamiltonian 都分成为自由运动的粒子部分与相互作用的部分，于是問題就在于由整个 Hamiltonian 的解中，求出其表示散射的解。因而就可予想到尽管各个問題的外观不同(以第1章的势散射情况作为典范)，但在它們之間是可以应用具有一定普遍性的方法的，而与势散射的差别在于(在例4中)其自由的 Hamiltonian 包含有內部自由度，以及相互作用的"势" V 不仅含有相对坐标，而且还含有內部自由度的坐标。

在上面所述的势散射中，也曾有求得其真正的解的，但在一般的情况下，还沒有求得具体解的普遍方法。因此，我們需要考虑下列两个問題：

1° 求解的近似式——关于各种近似解法的問題。

2° 不知道具体的解，但能够知道解的性质。特别是仅由 Hamiltonian 的一般性质可推出的解的性质——关于解的一般性质問題。

对于这类問題，即使不知其具体的解，但如能写出其形式解也是极为有益的。因为我們可以在此形式解的基础之上討論其近似解法，并由此导出其解的一般性质。有时甚至可写出与 Hamiltonian 的具体形式无关的形式解。这可将势散射的解改写符号而得到。为了給上述1°，2°問題的討論做好准备，在此先来讲讲形式解。

§8 形式解(I)

在势散射时我們主要是用 x 表象来討論的，同样，我們也能

用其他的表象来討論，例如用 p 表象[1]（参看 Dirac 的教科书，§ 50）。

进一步，如果能不涉及到表象而用算符来討論，并将势散射的結果一般化那是最好的了。因此，我們先从把势散射的情况改写成与表象无关的形式着手。应用 Green 函数的积分方程(3.8)（为了表明是外向散射波，故写为 $\psi_k \to \psi_k^{(+)}$ 但 (3.8) 中的 k 在此换为 $\boldsymbol{k}_0$）。

$$\psi_{k_0}^{(+)}(\boldsymbol{x}) = \exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}) + \int G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')V(\boldsymbol{x}')\psi_{k_0}^{(+)}(\boldsymbol{x}'), \quad (8.1)$$

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = -\frac{2m}{4\pi}\exp\frac{(ik_0|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \quad (8.2)$$

等价于如下方程

$$\psi_{k_0}^{(+)} = \phi_{k_0} + \frac{1}{E_0 - H_0 + i\varepsilon} V\psi_{k_0}^{(+)}. \quad (8.3)$$

其中 ε 是正的无穷小量（正确地应写成 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{(E_0-H_0+i\varepsilon)}$，以下略去 lim），$\psi_{k_0}^{(+)}$ 表示所要考虑的状态，ϕ_{k_0} 表示入射平面波的态，$\dfrac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}$ 及 V 都是运算子。这里二者等价的意思是指：作(8.3)的 x 表象时则与(8.1)相同。事实上，作(8.3)的 x 表象时，

$$\psi_{k_0}^{(+)}(\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}} + \int\left\langle \boldsymbol{x}\left|\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}\right|\boldsymbol{x}'\right\rangle V(\boldsymbol{x}')\psi(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}'.$$

---

[1] p 表象即把运算子 p 化成为对角綫形的表象。为此，将第1章中的波函数 $\psi(x)$ 用它的 Fourier 变换 $\psi(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int dx\exp(-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})\psi(x)$ 代替即可。原来的 $\psi(x)$ 称为 x 表象的波函数。动量 p 对 x 表象的 $\psi(x)$ 来說是微分算符，对 p 表象的 $\psi(\boldsymbol{p})$ 来說只是数的乘法

$$p_x\psi(\boldsymbol{p}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int dx\exp(-i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})\frac{1}{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}.$$

在 Dirac 的"量子力学"一书 § 50 中，就是用 p 表象处理碰撞問題的。

其中,第2项的分数可用p表象計算❶。

$$\left\langle x\left|\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}\right|x'\right\rangle$$
$$=\int\langle x|k\rangle\frac{1}{E_0-E_R+i\varepsilon}\langle k|x'\rangle dk$$
$$=\frac{2m}{(2\pi)^3}\int\frac{\exp[i(x-x')k]}{k_0^2-k^2+i\varepsilon}dk$$
$$=\frac{2m}{(2\pi)^2 i}\frac{1}{|x-x'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp[ik(x-x')]}{k_0^2-k^2+i\varepsilon}dk.$$

此积分是使用复数积分推得的，也是散射問题中最常导得的典型式。当$\varepsilon>0$时,积分路綫如图8.1(a),被积函数的极点比ε低2次的近似是$\pm\left(\frac{k_0+i\varepsilon}{2}\right)$. 当$\varepsilon\to0$时,积分路綫繞过极点,如图8.1($b$)。由于被积函数在$k$的上半平面上較远处很快趋近于0,故

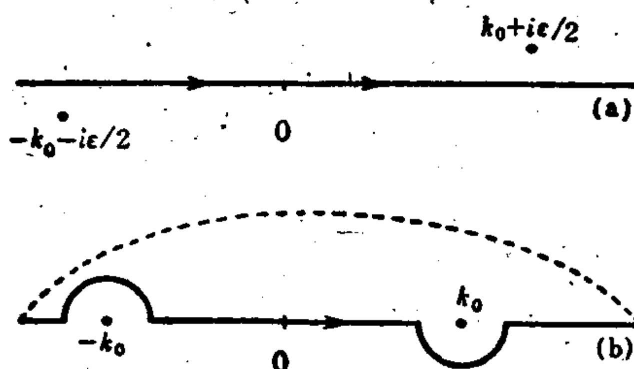


图　8.1

可补上一段如图所示的半圓路綫而作成封閉的积分回路。这个积分就是极点上的留数,因而得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\langle x\left|\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}\right|x'\right\rangle=-\frac{2m}{4\pi}\frac{\exp(ik_0|x-x'|)}{|x-x'|}.\tag{8.4}$$

---

❶ 在变换理論中,取

$$\langle x|k\rangle=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\exp(ikx),$$
$$\int\langle k|x\rangle dx\langle x|k'\rangle=\delta(k-k').$$

但是,以∞維空間来考虑时,k认为是連續变化的。

这也就是(8.2)的 Green 函数。

由此可見，从最初的 Schrödinger 方程可以得出算子方程(8.3)，但是，是否可以不通过(8.1)直接得出(8.3)呢? 反过来是較簡单的，在(8.3)的左边乘上 E_0-H_0，应用 $(E_0-H_0)\varphi_{k_0}=0$ 及

$$(E_0-H_0)\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}=1, \qquad (8.5)$$

得知

$$(E_0-H_0)\psi_{k_0}^{(+)}=V\psi_{k_0}^{(+)}. \qquad (8.6)$$

这里，对(8.5)多少需要作些說明。就是用使 H_0 对角化的表象来考虑[1] (以下称为 H_0 表象)，令 $H_0\to E$，如同求(8.4)时一样，将积分路綫分成为下图的形式:

$\bullet\, E_0+i\varepsilon$ → E_0 = E_0 +

立刻得知

$$\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}=P\frac{1}{E_0-H_0}-i\pi\,\delta(E_0-H_0). \qquad (8.7)$$

其中 P 表示取 Cauchy 主値。这样，(8.5)就很明显了。

反之，以 (E_0-H_0) 除(8.6)时，应得出(8.3)，不过在算子除法上应注意下列两点: (1)当此算子具有零点(例如，就 H_0 表象考慮的情形)时，$\dfrac{1}{E_0-H_0}$ 就具有极点。通常若不用算子本身而用其他函数写成积分，則就成了問題，因此有必要确定究竟是在极点处取主值呢，还是象上面那样繞过极点。(2) $(E_0-H_0)\phi=0$ 的解 ϕ_{E_0} (在 E_0 之后的能量为任意的)有数个，故若只是除的話，也就等于說，可以在商上加上任意的 ϕ_{E_0}。例如，令第一个任意性为 $\dfrac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}$ 时，得

[1] 为了确定其性态，除了 H_0 以外，其他变数也是必要的，因而在下面的論述中，只要能与 H_0 同时被应用到的，不論它是什么都是与 H_0 有变换可能的，但以后就不再詳細写出这部分变数了。

$$\psi=\phi_{E_0}+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\psi.$$

将它改为x表象，并采用在远处恰好成为入射波+散射波形状的条件，则ϕ_{E_0}的任意性就可确定为$\phi_{E_0}=\phi_{k_0}$。归根到底，为了求得(8.3)，将 Schrödinger 方程作形式的除法，此时得到了采用在远处的边界条件来确定不定性的方法。在这一方法中已不能再把V考虑为势能。同样，对于前节所列举的更复杂的散射問題中得出的在x表象上的不同 Green 函数，如看作算子方程，那就可以用完全相同的方法来处理❶。

这样，把算子作形式上的加减乘除，这是极为方便和有效的，但須注意到下列二点：

1° 作乘除时，必須按照順序。只有可对易的算子，才能交換順序。

2° 作除法时，对于具有零点的算子，須注意商的意义及由此增添的不定項。

若遵守上列要点，我們就可把它当作普通数那样来运算了。

由此得知，在一般的散射問題中，积分方程(8.3)亦成立，但它的漸近条件，振幅及截面等的关系又如何呢？例如同§7例4，在粒子的內部运动与相对运动能分开时，虽可以象势散射一样来处理，但碰撞后会出現三个以上的粒子，且在場論的例子中情况还要稍复杂些。对于这种情况，其实用第3章跃迁概率的方法来考虑就較为容易。現在让我們来研究§7中例4的情况。

問題的要点在于将各粒子的內部运动与相对运动分开来考虑。将无相互作用时的 Hamiltonian 分成为$H_0=H'_1+H'_2+K$，而把与其相应的最初、最終的能量分为$E_0=W_{k_0}$(相对)$+\varepsilon_{n_0}$(內

❶ 对于复杂的散射問題，用$i\varepsilon$的这种技巧来表示边界条件，严格說来，也还是需要証明的。

部)，$E=W_n+\varepsilon_n$。初态的波函数为 $\phi_{k_0}=\varphi_{k_0}\chi_{n_0}$，这里 φ_{k_0} 为平面波，χ_{n_0} 为内部波函数。由于碰撞后会过渡到各种内部态，故整个波函数可写成 $\psi_{k_0}^{(+)}=\sum\psi_{k_n}^{(+)}\chi_n$。将这些代入(8.3)，并由左边乘上 χ_n，得到

$$\psi_{k_n}^{(+)}=\varphi_{k_0}\delta_{n_0n}+\frac{1}{E_0-\varepsilon_n-K+i\varepsilon}\sum_m V_{nm}\psi_{k_m}^{(+)}. \tag{8.8}$$

其中 $V_{nm}=(\chi_n, V\chi_m)$ 只是相对坐标的函数。改用 x 表象时，与势散射的情况相同，成为

$$\psi_{k_n}^{(+)}(x)=\exp(i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x})\delta_{n_0n}+\int G_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\sum_m V_{nm}(\boldsymbol{x}')\psi_{k_m}^{(+)}(\boldsymbol{x}'), \tag{8.9}$$

$$G_n(\boldsymbol{x})=-\left(\frac{2m}{4\pi}\right)\exp\frac{(ik_n|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{8.10}$$

其中 m 是二个粒子的折合质量，k_n 是由 $E_0=\varepsilon_n+\frac{k_n^2}{2m}$ 确定。由(8.9)可确定各种不同 n 的散射振幅，

$$f_n=-\left(\frac{2m}{4\pi}\right)(\phi\boldsymbol{k}\chi_n, V\psi_{k_0}^{(+)}). \tag{8.11}$$

$n=n_0$ 是弹性散射，$n\neq n_0$ 相当于非弹性散射❶。其各个微分截面为

$$d\sigma_{n_0}=|f_{n_0}|^2d\omega, \tag{8.12}$$

$$d\sigma_n=\left(\frac{k_n}{k_0}\right)|f_n|^2d\omega \tag{8.13}$$

在(8.13)中含有 $\frac{k_n}{k_0}$ 是因为碰撞前与碰撞后的相对速度有所不同之故。

問題 1 試利用公式(8.7)

$$\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}=\frac{P}{E_0-H_0}-i\pi\delta(E_0-H_0)$$

❶ 弹性与非弹性亦可由 $\varepsilon_n=\varepsilon_0$，$\varepsilon_n\neq\varepsilon_0$ 来区别。

来从头証明(8.4)式。

問題 2 确立下列等式

$$\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}=P\frac{1}{E_0-H_0}+i\pi\delta(E_0-H_0), \tag{8.14}$$

$$\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}+\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}=2\cdot P\frac{1}{E_0-H_0},$$

$$\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}-\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}=-2\pi i\delta(E_0-H_0).$$

問題 3 証明下列式子

$$\left\langle x\left|\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}\right|x'\right\rangle=-\frac{2m}{4\pi}\frac{\exp(-ik_0|x-x'|)}{|x-x'|}, \tag{8.15}$$

$$\left\langle x\left|\frac{1}{E_0-H_0}\right|x'\right\rangle=-\frac{2m}{4\pi}\frac{\cos k_0|x-x'|}{|x-x'|}.$$

由(8.15)可知 $\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}$ 对应于内向波。

問題 4 替代前面的 $H_0=\frac{k^2}{2m}$，設 $H_0=(k^2+m^2)^{\frac{1}{2}}$ 或 $H_0=(k^2+m_1^2)^{\frac{1}{2}}+(k^2+m_2^2)^{\frac{1}{2}}$，試求在这种情况下(8.4)的 Green 函数的改变。

§9 形式解 (II)

我們知道(8.3)还未成为积分方程，也并非是解。現在就来考虑它的解。一种方法是取逐次近似，即将(8.3)左边所得的 $\psi^{(+)}$ 逐次代入右边第二項的 $\psi^{(+)}$ ($\psi_{k_0}^{(+)}$, $\phi_{k_0}^{(+)}$ 的足标省去).

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}&=\phi+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\left(\phi+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\psi^{(+)}\right)\\&=\phi+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\phi\\&\quad+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V\phi+\cdots.\end{aligned} \tag{9.1}$$

对于上式右边的无穷級数的各項，就实际例子来作具体計算是极其困难的，但当級数收斂时，无論如何总可以說在原則上我們是得到了解。如同 §2.1 所述，以下暫且就这种形式解进行討論。

将(9.1)改写为

$$\psi_{k_0}^{(+)}=U_{E_0}^{(+)}\phi_{k_0},\ \text{简写为}\ \phi^{(+)}=U^{(+)}\phi, \tag{9.2}$$

$$U^{(+)}\equiv U_{E_0}^{(+)}=1+(E_0-H_0+i\varepsilon)^{-1}V+(E_0-H_0+i\varepsilon)^{-1}V(E_0-H_0+i\varepsilon)^{-1}V+\cdots, \tag{9.3}$$

$U^{(+)}$ 是把 H_0 的解变为 H 的相同本征值之解的变换函数，这是本节問題討論的中心。应当注意 $U^{(+)}$ 不是真的算子。这由定义(9.3)就可明了，它包含有 E_0 作为参数，$U_{E_0}^{(+)}$ 是对能量 E_0 的波函数来作用的，因为对其他能量 E_0' 的波函数有别的参数的 $U_{E_0'}^{(+)}$ 来作用。在不致混淆时我們省略掉 $U_{E_0}^{(+)}$ 的足标 E_0。

这样，当求得 $U^{(+)}$ 时，对于与 H_0 的解 ϕ 有相同本征值的 H 的解 ψ，便可由 $\psi=U^{(+)}\phi$ 得出。但这只是求得了 H 解的一部分，例如束縛态的解就必須要用其他方法来求。

下面，我們考察一下 $U^{(+)}$ 的一般性质。

应用(9.2)时，(8.11)，(8.13)的散射截面(以本节所用的記号表示)就成为

$$d\sigma_n=\left(\frac{k_n}{k_0}\right)\left(\frac{2m}{4\pi}\right)^2|\langle\phi_k,\ VU^{(+)}\varphi_{k_0}\rangle|^2. \tag{9.4}$$

1° $U^{(+)}$ 满足积分方程

$$U^{(+)}=1+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}VU^{(+)}. \tag{9.5}$$

这几乎是自明的。因此亦可看作是 $U^{(+)}$ 的定义。

其次，定义 $U^{(-)}$，U 如下：

$$U^{(-)}=1+\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}VU^{(-)},$$

$$U=1+P\frac{1}{E_0-H_0}VU. \tag{9.6}$$

$U^{(-)}$ 相当于内向的散射波。参看(8.15)。

2° $(E_0-H_0)U^{(\pm)}=E_0-H_0+VU^{(\pm)}$. (9.7)

这也几乎是自明的。由此知(9.2)式成立。

3° $U^{(+)}=1+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}V.$ (9.8)

这可由在关于任意算子 A, B 的一般公式

$$\frac{1}{A-B}=\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\cdots \qquad (9.9)$$

(只有在两边各项及級数和的意义确定时，才有意义)中令 $A=E_0-H_0+i\varepsilon$, $B=V$,并根据(9.3)立即得出。

(9.9)的証明如下。右边

$$\left\{1+\frac{1}{A}B+\left(\frac{1}{A}B\right)^2+\cdots\right\}\frac{1}{A}=\frac{1}{1-\frac{1}{A}\cdot B}\cdot\frac{1}{A}=\frac{1}{A-B}.$$

这里，对于具有逆的任意两个算子，使用了 $(PQ)^{-1}=Q^{-1}P^{-1}$ 的关系式。

按理説，由(9.8)可以得出在形式上是封閉的解，但在实际計算时，又必須返回到使用展开式或其他别的方法，单就按其原状进行是不适宜的。

4° $U^{(\pm)}, U$ 之間的关系。

用 $T^{(\pm)}=\delta(E_0-H_0)VU^{(\pm)},\ T=\delta(E_0-H_0)VU$ (9.10)

来定义 $T^{(\pm)}, T$ 时，在 T 的 Hermite 关系上有

$$U^{(\pm)}=U(1\pm i\pi T)^{-1}, \qquad (9.11)$$

$$T^{(\pm)}=T(1\pm i\pi T)^{-1}. \qquad (9.12)$$

将(9.2)代入(8.11)可知，$T^{(+)}$ 能确定散射振幅，故也称为散射矩陣。

将(8.7)代入 $U^{(+)}$ 的积分方程，得

$$U^{(+)}=1-i\pi\,\delta(E_0-H_0)VU^{(+)}+P(E_0-H_0)^{-1}VU^{(+)}.$$

与 U 的积分方程相比較，可知只有非同次的項有所不同，与級数解比較时可知

$$U^{(+)}=U(1-i\pi\,\delta(E_0-H_0)VU^{(+)})=U(1-i\pi T^{(+)}), \qquad (9.13)$$

在左边乘上 $\delta(E_0-H_0)V$ 时，

$$T^{(+)}=T(1-i\pi T^{(+)}),$$

所以
$$T^{(+)}=\frac{T}{(1+i\pi T)}.$$

代入(9.13)就得(9.11)。又,以 H_0 表象写出 T 的級数解时,我們就可以知道 T 是 Hermite 的。

5° $$U^{(+)\dagger}U^{(+)}=1, \tag{9.14}$$

但在一般情况下

$$U^{(+)}U^{(+)\dagger}\neq 1. \tag{9.15}$$

在用 H_0 表象写出(9.14)时,則有

$$\langle E|U^{(+)\dagger}U^{(+)}|E_0\rangle=\delta(E-E_0).$$

应用(9.5)式,其左边成为

$$\left\langle E\left|\left(1+U^{(+)\dagger}V\frac{1}{E-H_0-i\varepsilon}\right)\left(1+\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}VU^{(+)}\right)\right|E_0\right\rangle$$
$$=\delta(E-E_0)+\frac{1}{E_0-E+i\varepsilon}\langle E|VU^{(+)}-U^{(+)\dagger}V|E_0\rangle$$
$$+E\left|U^{(+)\dagger}V\frac{1}{E-H_0-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}VU^{(+)}\right|E_0\rangle.$$

在第 3 項上应用公式:

$$\frac{1}{E-H_0-i\varepsilon}\cdot\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}$$
$$=\left(\frac{1}{E-H_0-i\varepsilon}-\frac{1}{E_0-H_0+i\varepsilon}\right)\frac{1}{E_0-E+i\varepsilon}, \tag{9.16}$$

并与第 2 項合并,成为

$$=\delta(E-E_0)$$
$$+\frac{1}{E_0-E+i\varepsilon}\left\langle E\left|\left(1+U^{(+)\dagger}V\frac{1}{E-H_0-i\varepsilon}\right)VU^{(+)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-U^{(+)\dagger}V\left(1+\frac{1}{E_0-H_0-i\varepsilon}VU^{(+)}\right)\right|E^0\right\rangle$$
$$=\delta(E-E_0)$$

卽証明了(9.14)。(9.15)的意义是,若 H_0 的解 ϕ_n 正交規格化时,

则与其相对应的 H 的解 $\psi_n=U^{(+)}\phi_n$ 亦被正交规格化；$\langle\psi_m,\psi_n\rangle=\langle\varphi_m\varphi_n\rangle=\delta_{mn}$。在作为特殊情况的势散射时，若取

$$\phi_k=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\exp(i\boldsymbol{kx}),$$

则
$$\langle\psi_{k'},\psi_k\rangle=\delta(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}).$$

(9.15) 式也可象下面那样証明。令 H_0 的本征解的完全规格正交系为 ϕ_n，

$$U^{(+)}\phi_n=\psi_n.$$

ψ_n 是 H 的本征解，且为正交系，但一般不能构成完备系❶。于是

$$U^{(+)}=\sum\psi_n\phi_n^\dagger. \tag{9.17}$$

我們知道，对任意算子 A，就两个任意完备系 $\{\varphi_n\}$，$\{\chi_m\}$，均可得到

$$A=\sum_m\sum_n\chi_m\langle\chi_m,A\varphi_n\rangle\varphi_n^\dagger.$$

現令 $A=U^{(+)}$，并設 χ_m 为 H 本征解的完备系（ψ_n 为其一部分，ψ_n 以外的写为 ψ_r），取 φ_n 为 ϕ_n 时，(9.17) 就成立。由此

$$U^{(+)\dagger}U^{(+)}=\sum\varphi_n\phi_n^\dagger=1,$$

$$U^{(+)}U^{(+)\dagger}=\sum\psi_n\psi_n^\dagger=1-\sum\psi_r\psi_r^\dagger, \tag{9.18}$$

若 H 具有 $U^{(+)}\phi_n$ 以外的本征解，则 $U^{(+)}U^{(+)\dagger}\neq1$。

問題 1 試証

$$U^{(-)\dagger}U^{(-)}=1,\qquad U^\dagger U=1+\pi^2T^2.$$

問題 2 以公式 (8.14)，(8.8) 改写 (9.19)，得

$$P\frac{1}{E-H_0}P\frac{1}{E_0-H_0}=\left(P\frac{1}{E-H_0}-P\frac{1}{E_0-H_0}\right)P\frac{1}{E_0-E}$$
$$+\pi^2\delta(E-E_0)\delta(E-H_0). \tag{9.19}$$

初看之，它好象与

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{(a-b)}$$

---

❶ 例如，H 有束縛态时，它就不能写成 $U\phi_n$ 的形式。

是矛盾的，但若将(9.18)式左边的意义另加规定，就不矛盾了。在 H_0 表象上(9.18)的左边不是

$$\int dE\int dE'\frac{f(E,E')}{(E-E')(E_0-E')},\tag{9.20}$$

而必須认为是

$$\int dE'\left\{\int dE\frac{f(E,E')}{E-E'}\right\}\frac{1}{E_0-E'}.\tag{9.21}$$

这里 $\frac{1}{(E_0-H_0)}$ 的积分是应乘以正則函数后进行的。若象(9.20)那样，把它乘上具有极点的 $\frac{1}{(E-E')}$ 的函数时，积分就无意义。应該象(9.21)那样，将 $\frac{1}{(E-E')}$ 一下子同时乘上 $f(E,E')$，正則化之后再积分。也就是說，假如极点的影响很强，则积分順序就不能随便交换。为了直接証明(9.19)，須先将(9.21)的 E 分为 $E_0+\varepsilon$，$E_0-\varepsilon$，而 $E_0-\varepsilon\leqq E\leqq E_0+\varepsilon$，令 $\varepsilon\to 0$，試証(9.19)的 δ 函数在其他范圍內，其主值式亦成立。

6° 将 S 矩陣的定义略加改进，为

$$S_{E_0}=1-2\pi iT_{E_0}^{(+)}=1-2\pi i\delta(E_0-H_0)VU_{E_0}^{(+)}.\tag{9.22}$$

其最自然的定义見第3章。应用(9.11)，

$$S=\frac{1-i\pi T}{1+i\pi T'},\tag{9.23}$$

从而 S 是么正的。

$$S^\dagger S=SS^\dagger=1.\tag{9.24}$$

实际上，这就是根据 H 的 Hermite 性而得，也正是概率守恒法則。关于 S 矩陣，在第4章中我們将作进一步的論述。

問題 試証

$$U^{(-)}=U^{(+)}S^{-1},\qquad S=U^{(-)\dagger}U^{(+)}.\tag{9.25}$$

第3章　非定常的处理方法

大部分的散射問題，若只从实用的角度考虑，都可以用定常的方法处理而得到解决。但另一方面，在§6中曾經提到过的非定常的处理方法，正象以后即可看到的，在应用于場的理論方面却是极其方便而且有效的。在这里我們将对§6所留下的問題介紹一般的处理方法，并与第2章定常的处理方法进行比較。

首先，必須求出与非定常态 Schrödinger 方程的 Born 近似无关的解，为此，在§10中我們将从一般說来是較方便的相互作用表象开始談起。

在§11中論述这种表象上的一般解，§12是利用这样的解定义跃迁概率，散射截面，§13将本章的方法与第2章的方法进行比較。

§10　相互作用表象

到目前为止所讲述的量子力学中，都是用波函数与时間一起变化来表示状态变化的，而 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{p}$ 等量是用对时間不变的算符来表示的，并称之为 Schrödinger 表象。

假設以 Schrödinger 表象来考虑，令其表示某一时刻 t_0 时，碰撞前的粒子状态的波函数 $\psi(t_0)$ 是已知的。則波函数随时間的变化关系由 Schrödinger 方程

$$\frac{i\cdot\partial\psi(t)}{\partial t}=(H_0+V)\psi(t) \tag{10.1}$$

确定。在經历較长时間以后，若知其碰撞的最終时刻的波函数 $\psi(t)$，就可推知碰撞后的情况。其形式解为

$$\psi(t)=\exp[-iH(t-t_0)]\psi(t_0), \tag{10.2}$$

这样，当无相互作用时 $\psi(t)$ 也仍然在变化，但与一般的含有时間变化的微扰論尙无联系，所以是不方便的。为了使 $\psi(t)$ 仅在有相互作用时发生变化，只需更换其表象卽可。現将 Schrödinger 表象中的波函数 $\psi_s(t)$ 用

$$\psi_I(t)=\exp[iH_0t]\psi_s(t) \tag{10.3}$$

(为表示区别，分别用足标 s, I) 来代替。在无相互作用时，如同 (10.2) 中設 $V=0$ 那样可知不随时間而变化。更换波函数的表象时，对算符来說，也必須变换其表象而使其期望値不变，卽

$$A_I(t)=\exp[iH_0t]A_s(t)\exp[-iH_0t]. \tag{10.4}$$

这种表象称为相互作用表象 (interaction representation)。将 (10.3) 对时間微分，則在相互作用表象中的 Schrödinger 方程就成为

$$\frac{i\partial\psi_I(t)}{\partial t}=V_I(t)\psi_I(t), \tag{10.5}$$

$$V_I(t)=\exp[iH_0t]V_s\exp[-iH_0t],$$

将(10.4)对时間微分，得任意力学量 $A_I(t)$ 随时間的变化为

$$\frac{i\partial A_I(t)}{\partial t}=[A_I(t), H_0]. \tag{10.6}$$

无論用何种表象，H_0 均为同一形式。

問題 1 假設态用对时間无变化的波函数表示，又設表示力学量的算符随时間一起变化，这样，就能描述某物理体系，而这种表示法称为 Heisenberg 表象。令 $t=0$ 时，Schrödinger 表象与 Heisenberg 表象重合，則二者之間的变换关系为

$$\psi_H=\exp[iHt]\psi_s(t), \tag{10.7}$$

$$A_H(t)=\exp[iHt]A_s\exp[-iHt]. \tag{10.8}$$

試証，由此得知，相互作用表象与 Heisenberg 表象之間的关系为

$$\psi_H=\exp[iHt]\exp[-iH_0t]\psi_I(t), \tag{10.9}$$

$$A_H(t)=\exp[iHt]\exp[-iH_0t]A_I(t)\exp[iH_0t]\exp[-iHt]. \quad (10.10)$$

問題2 在包含有傳統时間的微扰計算中，将 ψ_s 用 H_0 的本征函数 φ_n 展开(即(6.3)的一般化)

$$\psi_s(t)=\sum C_n(t)\exp[-iE_nt]\varphi_n;$$

試証为使 $C_n(t)$ 成为相互作用表象，必須将时間因子 $\exp[-iE_nt]$ 换成别的形式。

§11 变换函数❶

求这些基于相互作用表象的 Schrödinger 方程(10.5)形式的普遍解，方法有二，其一是用 Schrödinger 表象，如(10.2)，立刻可求得解，再将表象变换成相互作用表象，則得

$$\psi(t)=\exp[iH_0t]\exp[-iH(t-t_0)]\exp[-iH_0t]\psi(t_0). \quad (11.1)$$

其二是积分(10.5)，成为

$$\psi(t)=\psi(t_0)-i\int_{t_0}^{t}V(t')\psi(t')dt',$$

以逐次近似求解，得

$$\psi(t)=\Big[1-i\int_{t_0}^{t}dt_1V(t_1)+(-i)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2V(t_1)V(t_2)+\cdots$$
$$+(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nV(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)$$
$$+\cdots\Big]\psi(t_0). \quad (11.2)$$

这两种作法虽外表不同，但其結果都一样。对于把 $\psi(t_0)$ 变为 $\psi(t)$ 的"变换函数" $U(t,t_0)$，用任何一种方法定义均可。

$$U(t,t_0)=\exp[iH_0t]\exp[-iH(t-t_0)]\exp[-iH_0t], \quad (11.3)$$

$$U(t,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_nV(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n). \quad (11.4)$$

它們之中不論哪一个都是同阶的微分方程

---

❶ 本节中将省略相互作用表象的足标 I。

$$\frac{i\partial U(t,\ t_0)}{\partial t}=V(t)U(t,\ t_0) \tag{11.5}$$

在初始条件 $U(t,t_0)=1$ 时的解。$U(t,t_0)$ 又可定义为积分方程

$$U(t,\ t_0)=1-i\int_{t_0}^{t}dt'V(t')U(t',\ t_0) \tag{11.6}$$

的解。

問題 1 試証

$$\frac{i\partial U(t,\ t_0)}{\partial t_0}=-U(t,\ t_0)V(t_0), \tag{11.7}$$

$$U(t,\ t_0)=1+i\int_{t_0}^{t}dt'U(t,\ t')V(t'). \tag{11.8}$$

問題 2 (11.4) 右边对时間积分，由上、下限可知被积項 $V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)$ 中的时間变数 $t_1>t_2>t_3>\cdots t_n$. 把积分的上、下限都变成 t 及 t_0，显然是較方便的，为此，使用 Dyson 編时运算的算符 P:

$$\begin{aligned}P(V(t_1)V(t_2)\cdots)&=\cdots V(t_1)V(t_2)\cdots;\\&\qquad\cdots>t_1>t_2>\cdots\\&=V(t_2)V(t_1)\cdots;\\&\qquad\cdots>t_2>t_1>\cdots\end{aligned}$$

即可。故

$$U(t,\ t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}\int dt_1\cdots dt_nP(V(t_1)\cdots V(t_n)), \tag{11.9}$$

或

$$U(t,\ t_0)=P\cdot\exp\left[i\int_{t_0}^{t}V(t')dt'\right]. \tag{11.10}$$

下面列举变换函数的一些性质：

1° 关于时間的加性

$$U(t,\ t')U(t't_0)=U(t,\ t_0), \tag{11.11}$$

2° 逆的存在

$$(U(t,\ t_0))^{-1}=U(t_0,\ t), \tag{11.12}$$

3° 么正性

$$U(t,\ t_0)^{\dagger}U(t,\ t_0)=U(t,\ t_0)U(t,\ t_0)^{\dagger}=t. \tag{11.13}$$

以上三种性质均可用 (11.3) ~ (11.5) 中任一定义来立即証明。最

后，(11.13)就是依据于 Hamilto nian 的 Hermite 性，又 $|\psi(t)|^2=|\psi(t_0)|^2$ 表明概率是守恒的。

§12 再論散射截面，跃迁概率

如前所作，我們得出了不涉及 Born 近似的一般解。現在再象 §6 一样，考虑用跃迁概率来作散射截面的表示式。为此，設碰撞前及碰撞后的粒子状态的波束分别为 ψ_i, ψ_f，于是当时刻为 t_0 由 ψ_i 出发时，在 $t>t_0$ 时刻的态 $U(t,t_0)\psi_i$ 中含有的特定态 ψ_f 可由 $|\langle\psi_f:U(tt_0)\psi_i\rangle|^2$ 得出，其对时間的改变之比在适当的条件下几乎恒定。这样，跃迁概率就定义为

$$w_{fi}=\frac{\partial}{\partial t}|\langle\psi_f:U(t,t_0)\psi_i\rangle|^2. \tag{12.1}$$

所謂适当条件即指下列情形。

关于碰撞前、后粒子的相对运动，其初态、末态都是用波束来考虑的。特别是关于碰撞前的波束，与 §2 一样，在 $t=t_0$ 时的位置是 x_0，寬度为 Δx_0，且几乎在接近于 $t=0$ 及 $x=0$ 时碰撞，又令发生碰撞的范圍的大小为 a，由(2.3)，(2.4)，当 $R\sim|x_0|$ 时，

$$|x_0|\gg\Delta x_0\gg a, \tag{12.2}$$

以及在直到碰撞时为止波束不变形的条件，由(2.8)知为

$$\Delta x_0\gg\left(\frac{|x_0|}{k_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12.3}$$

这里，我們是在无視于波束形状、大小的极限的(12.1)式来討論的，故考虑 $\Delta x_0\to\infty$, $|x_0|\to\infty$, $|t_0|\to\infty$ 即可。$\Delta x_0\to\infty$ 意味着 ψ_i 成为平面波 ϕ_i，这样其极限为

$$\lim_{t_0\to-\infty}U(t,t_0)\psi_i=U(t,-\infty)\phi_i. \tag{12.4}$$

若只考虑 $U(t,-\infty)$ 的話，也就是(11.3)或(11.4)中 $t_0\to-\infty$ 时的情况，它是含有不确定的振动項的。我們約定記号形式的

$U(t,-\infty)$，$\int_{-\infty}^{t}$ 等都用(12.4)式左边来定义。当然，对于 $U(t,-\infty)$ 及 $\int_{-\infty}^{0}dt$，还可給出在計算上更方便的表示式，这将在下一节中討論。以下我們暂且照上面所說，按 $U(t,-\infty)$，$\int_{-\infty}^{0}dt$ 都是收斂的約定来处理。

現在我們一方面来确定 w_{fi} 与 t 无关，同时計算(12.1)。在末态时，若 t 为有限，就表示不出不确定的項来，故以 H_0 的解 ϕ_f 替换 ψ_f，用(11.5)，(11.6)得到

$$w_{fi}=2R\langle\phi_f, V(t)U(t,-\infty)\phi_i\rangle^*$$
$$*\langle\phi_f\int_{-\infty}^{t}V(t')U(t',-\infty)\phi_i\rangle.$$

这里 R 表示实数部分。因而若应用

$$V(t)U(t,-\infty)$$
$$=\exp[iH_0t]VU(0,-\infty)\exp[-iH_0t], \tag{12.5}$$

则得

$$w_{fi}=|\langle\phi_f, V(0)U(0,-\infty)\phi_i\rangle|^2$$
$$\cdot 2R\int_{-\infty}^{t}\exp[i(E_f-E_i)(t'-t)]$$
$$=2\pi\delta(E_f-E_i)|\langle\phi_f, V(0)U(0,-\infty)\phi_i\rangle|^2, \tag{12.6}$$

就成为与时間无关的了。

要想由此求出散射截面，可附加与§6中相同的末态的态密度，并予以规格化而使粒子的入射密度符合截面的定义。若設动量为 k，折合质量为 m，则可从与(6.8)相同的式子得出相对运动的态密度，而其能量积分，则由于(12.6)中含 $\delta(E_f-E_i)$ 之故，仅在 $E_f=E_i$ 能量守恒时才存在。入射粒子的規格化只需乘上 $\frac{\Omega}{v_0}$，$v_0=\frac{k_0}{m}$ 即可。最后得

$$d\sigma=\frac{k}{k_0}\left(\frac{2m}{4\pi}\right)^2\Omega^2|\langle\phi_f, V(0)U(0,-\infty)\phi_i\rangle_{E_f=E_i}|^2. \tag{12.7}$$

在(12.7)中設 $U^{(+)}=1$, $k=k_0$, 可得出(6.10), 由此可知, 它也就是在势散射时用 Born 近似求出的(6.10)的普遍形式。

这里, (12.5) 是需要証明的, 現在用級数展开来考虑, 对第 n 项引用 $V(t)=\exp[iH_0(t-t')]V(t')\exp[-iH_0(t-t')]$, 得

$$(-i)^n\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_nV(t)V(t_1)\cdots V(t_n)$$

$$=(-i)^n\int_{-\infty}^{t}dt_1\cdots\int_{-\infty}^{t_n}dt_n\exp[iH_0t]V(0)V(t_1-t)\cdots\cdot V(t_n-t)\exp[-iH_0t],$$

改变积分范圍,設 $t_i-t\to t_i$ 时 $(V(0)=V)$,

$$=(-i)^n\int_{-\infty}^{0}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n\exp[iH_0t]VV(t_1)\cdots\cdot V(t_n)\exp[-iH_0t]$$

由此得出(12.5)。

問題　利用(12.5)可得出

$$\langle f|U(t,-\infty)|i\rangle=-i\int_{-\infty}^{t}dt\exp[i(E_f-E_i)t]\cdot\langle f|V(0)U(0,-\infty)|i\rangle.$$

将对时間的积分的下限設为 t_0 再来求积分, 并作 $|\langle f|U(t,-\infty)|i\rangle|^2$, 試証与在含有傳統时間的微扰論計算时同样地令 $t-t_0\to\infty$ 时,有

$$|\langle f|U(t,-\infty)|i\rangle|^2=\partial\pi\delta(E_f-E_i)|\langle f|V(0)U(0,-\infty)|i\rangle|^2.$$

§13　与定常的处理方法的关系

比較两个截面公式(12.7)与(9.4), 得知 $U^{(+)}$ 与 $U(0,-\infty)$ 相对应,若

$$U(0,-\infty)=U^{(+)},\tag{13.1}$$

这两个截面在考虑 ϕ 規格化时是相同的。实际上, 可以証明(13.1)或更精确的式子

$$U(0,-\infty)\phi_{k_0}=U_{E_0}^{(+)}\phi_{k_0}=\psi_k^{(+)}.\tag{13.2}$$

为此, 例如只需証明 $U(0,-\infty)\phi_{k_0}$ 是滿足与上章(8.3)相同的积分方程卽可。本来 $U(0,-\infty)\phi_{k_0}$ 就是由(12.4)所定义,也就是使

用波束来証明的，但其計算多少有些麻煩（例如 Sunakawa: Prog. Theor. Phys., **14**(1955), 175)。这里，只需要求对 $U(0, -\infty)$，給出一个处理 $-\infty$ 的方法，使能断定它满足前章的(2.3)式即可。此种处理方法，正規地讲，是应用波束来确定的（参看上述論文）。

其处理的方法就是对于发散的积分，当 $\varepsilon>0$ 时，定义

$$\int_{-\infty}^{0} \exp[ixt]dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{0} \exp[ixt+\varepsilon t] = -\frac{i}{(x-i\varepsilon)}, \quad (13.3)$$

$$\int_{0}^{\infty} \exp[ixt]dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty} \exp[ixt-\varepsilon t] = \frac{i}{(x+i\varepsilon)}. \quad (13.4)$$

这又与假設其和及差分别为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[ixt]dt &= 2\pi\,\delta(x),\\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin xt\cdot dt &= \frac{1}{x}\end{aligned} \quad (13.5)$$

是相同的。但上面的发散积分是包含有“极”的积分，因而，正象(9.19)的例子中所說明的，不注意积分順序是不成的。

現在返回到(13.2)的証明，利用(12.6)，

$$U(0, -\infty)\phi_{k_0} = \phi_{k_0} - i\int_{-\infty}^{0} V(t)U(t-\infty)\phi_{k_0},$$

由(12.5)，

$$= \phi_{k_0} - i\int_{-\infty}^{0} dt\exp[i(H_0-E_0)t]V(0)U(0, -\infty)\phi_{k_0},$$

再用(13.3)式处理得

$$U(0, -\infty)\phi_k = \phi_{k_0} + (E_0-H_0+i\varepsilon)^{-1}VU(0, -\infty)\phi_{k_0}.$$

这与(8.3)的 $\psi_k^{(+)}$ 的方程相同，即証明了(13.2)。且上章所述 $U^{(+)}$ 的性质，也就完全是 $U(0, -\infty)$ 的性质。

关于(13.2)我們要注意两点。$U(0, -\infty)\phi_{k_0}$ 是 H_0 的解，这件事若不应用波束（其理由是用波束比平面波麻煩），也可如下来解說：从 $t=-\infty$ 时 H_0 的解（此时无相互作用）ϕ_{k_0} 出发的波函数，按 Schrödinger 方程(1.5)变化（即受到相互作用）而成为当 t

趋于 $t=0$ 时有相互作用的 H 的解。这里，虽說在 $t=-\infty$ 时没有相互作用，但如果它是意味着 $V=0$ 的話，那末 H_0 的解的平面波 ϕ_{k_0}。对于向全空間扩散而言，当用波束来考虑时，它的两个粒子还是离得相当远的，并且无論波束是多么接近于平面波，也是不会重合的 $(\Delta x_0 \ll |x_0|)$，这就和先前的有所差别。因此，假如完全不用波束，且按文字表述成为"$t=-\infty$ 时，$V=0$，$\psi_{k_0}=\phi_{k_0}$。在 $t=0$ 时，为 $V=V$，$\psi_k=U\phi_{k_0}$"，例如，在令 $V\to V\exp(-\varepsilon|t|)$ $(\varepsilon\to 0)$ 时，是否与用波束考虑时相同，这在最初并不清楚，但在多数情况下，却都会得出一致的結果。这就意味着相互作用是慢慢地进入的，也可以說絕热定理是成立的。

另一点值得注意的是，如果从 $t=-\infty$ 时 H_0 的解能得出 $t=0$ 时 H 的解的話，也就是說关于从 $t=0$ 时 H 的解予推到 $t=\infty$ 时能成为 H_0 的解，那末这是与事实相符的。为此考虑

$$S=U(\infty,-\infty)$$

$$=U(\infty,0)U(0,-\infty) \tag{13.6}$$

$$=1-i\int_{-\infty}^{\infty}dt'V(t')U(t',-\infty). \tag{13.7}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n). \tag{13.8}$$

其所以用 S，如同以下所示，因为它与 §9 的 S 矩陣相同之故。作 $(\phi_k, S\phi_{k_0})$，由 (13.7) 并注意 (12.5)，

$$\langle\phi_k, S\phi_{k_0}\rangle$$

$$=\delta(k,k_0)-2\pi i\delta(E_f-E_i)\langle\phi_k, VU(0,-\infty)\phi_{k_0}\rangle, \tag{13.9}$$

当 S 用 H_0 表象对角化时，

$$[S, H_0]=0, \tag{13.10}$$

由此可知 $S\phi_{k_0}$ 是 H_0 的解。

由 (13.2) 比較 (13.9) 与 (9.22) 可知 S 的两种定义是相同的。

再，(13.6)或与此相同的(9.25)直接表明了上述 S 矩陣的物理意义。即表示从 $t=-\infty$ 出发的粒子的波函数在 $t=0$ 时成为碰撞的解，又在 $t=+\infty$ 时再次成为沒有相互作用的波函数。而其振幅可从(13.9)中，当 $k\neq k_0$ 时去掉 δ 函数而由第二項得到，它与(12.6)的跃迁概率中所出現的相同。一句話，S 矩陣就是两者态之間的变换函数。

$|(\phi_k, S\phi_{k_0})|^2$ 是从 ϕ_{k_0} 出发当相互作用完了之后在 ϕ_k 上的概率。注意若用(13.8)时，我們就得到 $(2\pi\delta(E_f-E_i))^2=4\pi^2\delta(E_f-E_i)\delta(0)\to\infty$，这就出現了困难，并且要把 $\delta(0)$ 返回到它的原出处也多少需要一定技巧。但如果設

$$2\pi\delta(0)=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t_0\to-\infty}}\int_{t_0}^{t}\exp(it'\times 0)\,dt'=\lim(t-t_0),$$

则就可定义跃迁概率为

$$\frac{|(\phi_k, S\phi_{k_0})|^2}{\lim(t-t_0)}=2\pi\delta(E_f-E_i)\,|\langle\phi_k VU(0,-\infty)\phi_{k_0}\rangle|^2,$$

这与(12.6)一致。

問題 1 試証

$$U(0,+\infty)\phi_{k_0}=U_{E_0}^{(-)}\phi_{k_0}. \qquad (13.11)$$

問題 2 运用級数解以及(13.3)証明(13.2)。

問題 3 由 $U(t,t_0)=(U(t_0t))^\dagger$ 証明

$$U(\pm\infty,0)=U(0,\pm\infty)^\dagger=U^{(\mp)\dagger}, \qquad (13.12)$$

从而又有

$$S=U^{(-)\dagger}U^{(+)}. \qquad (13.13)$$

問題 4 試用 $\psi_{k_0}^{(+)}$ 的积分方程及 $U(t,0)$ 的(11.3)証明

$$U(\infty,0)\psi_{k_0}^{(+)}=\phi_{k0}-2\pi\delta(H_0-E_0)V\psi_{k_0}^{(+)}, \qquad (13.14)$$

$$U(-\infty,0)\psi_{k_0}^{(+)}=\phi_{k_0}, \qquad (13.15)$$

其中(13.14)是 $U(\infty,-\infty)=S$（在前章的意义下）的証明，而(13.15)则为 $U^{(+)\dagger}U^{(+)}=1$ 的証明。

第4章 S 矩 陣

为了計算散射截面，只需求出S矩陣。但在实际問題中，用解析的方法求S的具体表达式是不多的，相反，在多数的場合下，却常需采用某种近似的方法。但尽管如此，假如我們只知道S的一部分性质，而不知其具体表达式的話，則解析方法也不比用近似法求解差，更何况这种一般性质用近似法求也是費解的。S矩陣的这种性质分为：1° 么正性，2° 守恒定律，3° 精細均衡，4° 解析性。其中 4° 将在第 7 章中讲述，1°，2°，3° 在本章加以說明。

§14 S 矩陣的么正性

有关这种性质，已在第 2 章中証明，現仅介紹其应用。

光学定理：我們知道在求总截面时，只要知道散射振幅，即使不积分也有法求出。令散射振幅为

$$\langle f|T^{(+)}|i\rangle=\delta(E_f-E_i)\langle f|T^{(+)}(E_0)|i\rangle, \tag{14.1}$$

則

$$\mathrm{Im}\langle i|T^{(+)}(E_0)|i\rangle=-\left(\frac{v_0}{2}\right)\sigma_t. \tag{14.2}$$

上式中，v_0是入射粒子的速度，σ_t是以i的状态入射时的总截面。此式也包括如同在产生核反应时的非彈性散射的情况。在势散射时，用振幅$f(\theta)$，則得

$$\mathrm{Im}\,f(\theta=0)=\left(\frac{k_0}{4\pi}\right)\sigma_t. \tag{14.3}$$

以上虽是証明，但若只需确定(14.3)，則比較(4.25)中之$f(\theta)$(在$\theta=0$时)与(4.29)式即可。对于包含有非彈性散射的一般情况；

要使用 S 矩陣的么正性。若应用(14.1)中所确定的 $T^{(+)}(E_0)$，則这种么正性可記为

$$\operatorname{Im}\langle i|T^{(+)}(E_0)|i\rangle+\pi\sum_{E_n=E_0}\langle i|T^{(+)}(E_0)|n\rangle\langle n|T^{(+)}(E_0)|i\rangle=0.$$

其中第2項的和式，可对任意状态的 $E_n=E_0$ 来取。总截面为

$$\sigma_t=\left(\frac{2\pi}{v_0}\right)\sum_{E_n=E_0}|\langle n|T^{(+)}(E_0)|i\rangle|^2,$$

故得出(14.2)。上述这种关系我們所以称之为光学定理，是因为它是在最初研究光散射时发现的。这个定理在第7章的色散关系中有大量的应用。

§15 守恒定律

在一般的碰撞問題中，我們知道，能量守恒，动量、角动量守恒等定律都是成立的。现在証明在 S 矩陣中也成立这些定律。关于能量守恒，由 S' 矩陣的定义可知，仅在能量守恒成立的状态 i, f，当 $E_i=E_f$ 时，$\langle f|S|i\rangle\neq0$ 才成立，即 $[H_0, S]=0$. 至于其他的守恒定律，下列定理是很有用的。

定理1 若算子 A 能与 H_0, V 对易，則亦能与 $S, U^{(+)}$ 对易。

由定义(9.3)，(9.22)可知，$U^{(+)}$ 及 S 是从 H_0 与 V 作成的，故在 $[H_0, A]=[V, A]=0$ 时，有 $[U^{(+)}, A]=0$, $[S, A]=0$.

特别是，如果总动量 $\boldsymbol{P}$ 及总角动量 $\boldsymbol{J}$ 能与 H_0 及 V 对易，則它們亦能与 S 及 $U^{(+)}$ 对易，所以碰撞前后的总动量及总角动量守恒。

关于角动量，下面的定理成立。

定理2 能与角动量 J 对易的 S 矩陣，仅是 J 的大小的函数。

証明 若我們采用使 J^2, J_z 成对角化的表象，則有

$$\langle jm|S|j'm'\rangle=\delta_{jj'}\delta_{mm'}S(j,m).$$

現証明 $S(j,m)$ 仅仅是 j 的函数。設 $J_+=J_x+iJ_y$，取 $[J_+,S]=0$ 中的 $(j,m;j,m-1)$，則

$$\langle jm|J_+|j,m-1\rangle S(j,m-1)$$
$$=S(j,m)\langle jm|J_+|j,m-1\rangle,$$
$$\therefore\quad S(j,m-1)=S(j,m).$$

上式表明 S 与 m 无关。

在勢散射及二体碰撞的情况，我們很容易得知使 S 矩陣对角化的可观察力学量的完备系。因为，那时 S 矩陣的对角元素由么正性变成 $S=\exp[2i\delta]$．且可利用此式进行一般的"周相移分析"(phase shift analysis)。

例 1　自旋为零的粒子在具有中心力的勢場中散射的情况　有关这种情况的处理在第2章中已經讲过，因此这里仅以应用定理2的一般方法来求解。

設入射时的动量为 $\boldsymbol{k}_0$，射出时的动量为 $\boldsymbol{k}$，散射矩陣为 $\langle\boldsymbol{k}|T^{(+)}_{(E)}|\boldsymbol{k}_0\rangle$．与其相連系的 S 矩陣为 $S=1-2\pi i\delta(E-H_0)T^{(+)}(E)$．另一方面，为了使 $T^{(+)}(E)$ 对角化，我們采用使 H_0, J^2, J_z 对角化的表象，得出

$$\langle E,j,m|T^{(+)}(E)|E,j',m'|\rangle=\delta_{jj'}\delta_{mm'}T^{(+)}_j(E),\tag{15.1}$$

$$T^{(+)}_j(E)=\left\{\frac{1-\exp[2i\delta_j(E)]}{2\pi i}\right\}.\tag{15.2}$$

由上述定理可知上式中的 $\delta_j(E)$ 仅是 j 的函数。但是，碰撞前后的状态用平面波表示时，是 $\boldsymbol{P}$ 的本征态，但不是 J^2, J_z 的本征态。就 $\langle\boldsymbol{k}|T^{(+)}_{(E)}|\boldsymbol{k}_0\rangle$ 与 (15.1) 来看，只是表象有所不同，故可与 Dirac 变换理論联系起来。卽进行下列表象变换：

$$(k_x,k_y,k_z)\to(E,\cos\theta,\varphi)\to(E,J^2,J_z).$$

其中 θ,φ 是用极坐标表示 $\boldsymbol{k}$ 时之角。

$$\langle\boldsymbol{k}|\cdots=\left(\frac{\partial(E,\cos\theta,\varphi)}{\partial(k_x,k_y,k_z)}\right)^{\frac{1}{2}}\langle E,\cos\theta,\varphi|\cdots$$

$$=\sum_{j,m}\left(\frac{\partial(E,\cos\theta,\varphi)}{\partial(k_x,k_y,k_z)}\right)^{\frac{1}{2}}\langle\cos\theta,\varphi|j,m\rangle\langle E,j,m|\cdots,\tag{15.3}$$

这里，可令

$$\frac{\partial(k_x, k_y, k_z)}{\partial(E, \cos\theta, \varphi)} = k^2\frac{dk}{dE},$$

$$<\cos\theta, \varphi|j, m> = Y_{jm}(\theta, \varphi).$$

对 $|k_0>$ 也作同样变换，并取 k_0 方向为 z 轴方向，则

$$<k|T^{(+)}|k_0> = \left(\frac{dE}{dk}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right)\sum_j\sum_m Y_{jm}(\theta, \varphi)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\delta_{m_0}T_j^{(+)}(E)$$

$$= \frac{1}{k^2}\frac{dE}{dk}\sum_j\frac{2l+1}{4\pi}\cdot P_l(\cos\theta)T_j^{(+)}(E). \tag{15.4}$$

特别是以振幅表示时，得

$$f(\theta) = -(2\pi)^2 k\left(\frac{dk}{dE}\right)<k|T^{(+)}_{(E)}|k_0>$$

$$= \left(\frac{1}{2ik}\right)\sum(2l+1)[\exp(2i\delta_j(E))-1]P_l(\cos\theta),$$

再次导出了 (4.25)。如作 (15.4) 之分解，入射波是平面波，并含有各种角动量的波，而其各个角动量的波仅在此范圍內散射，或說与形成散射波的平面波迭加而成。

上述結論对于在两个自旋为 0 的粒子散射时，重心系的相对运动亦成立。

例 2 自旋为$\frac{1}{2}$与自旋为 0 的粒子 例如，中子与 α 粒子的散射，或 π 介子与质子的散射等情况，考虑其分离重心运动之后剩下的相对运动。此时角动量为

$$J = L + \frac{\sigma}{2},\quad L = x\times p. \tag{15.5}$$

其中 x, p 表示相对运动部分，而 $\frac{\sigma}{2}$ 是自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的自旋量。这里，使 S 对角化的可观察力学量組仅有 H_0, J^2, J_z 还不够，因为把 L 与 $\frac{\sigma}{2}$ 耦合成 J 时，可由两个不同的 l 耦合成同样的 j. 为区别起見，經常使用偶奇性（parity 宇称）。所謂偶奇性，就是关于空間反演 $x\to -x$ 的变换性质。这时，若令其算符为 Π（么正），则可定义为

$$\Pi x\Pi^\dagger = -x. \tag{15.6}$$

但在用 x 表象时，須取 $(x|\Pi|x') = \delta(x+x')$. 由此可知成立 $p\to -p$, $L\to L$, $\sigma\to\sigma$ 变换。对于波函数（x 表象），标記为

$$\Pi\psi(x)=\psi(-x). \tag{15.7}$$

假如設想 ψ 具有內部的偶奇性(內禀宇称)，则根据其偶或奇而在右边可添写 ±1. 因为 $\Pi^2=1$；故对其本征函数，Π 的本征値也为 ±1. 例如球函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 的偶奇性为 $(-1)^l$. 用 H_0, J^2, J_z 表象的偶奇性为 $(-1)^l\times$(內部的偶奇性)。由于 l 是 $j=l\pm\frac{1}{2}$ 的 l，所以可用 Π 作为先前所提到的区别。但是，若 H_0 或 V_0 都可与 Π 对易，则其偶奇性在碰撞前后是不变的。

上面所述的是准备知識，下面我們試作与例1相同的周相移分析。散射振幅，如同 $\langle \boldsymbol{k}m|T^{(+)}(E)|\boldsymbol{k}_0m_0\rangle$ 一样，可用 $\boldsymbol{p}$ 与 σ_z 的本征値表示，进行如下的表象变换亦可。

$$(\boldsymbol{p},\sigma_z)\rightarrow(E_0,\cos\theta,\varphi,\sigma_z)\rightarrow(E,L^2,L_z,\sigma_z)\rightarrow(E,J^2,J_z,\Pi).$$

上式与例1不同之处仅在于最后的角动量 $\boldsymbol{L}$ 与 $\frac{\sigma}{2}$ 耦合起来了。但其变换函数仍为 Clebsch–Gordan 系数 $\left(l\,\frac{1}{2}\,mm_0|JM\right)$❶. 若在 $\boldsymbol{k}_0$ 方向上取 z 軸，则分离成

$$\langle \boldsymbol{k}m|T^{(+)}(E)|\boldsymbol{k}_0m_0\rangle=\left(\frac{dE}{dk}\right)\left(\frac{1}{k}\right)\sum_{J,l,m',0}Y_{lm'}(\theta,\varphi)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$
$$\times\left\langle l\,\frac{1}{2}\,m'm|JM\right\rangle\left\langle JM|l_0\frac{1}{2}\,0m_0\right\rangle T^{(+)}_{l\pm}(E).$$

上式中的內部偶奇性在碰撞前后是不改变的，而 $T^{(+)}_{l\pm}(E)$ 即是 $j=l\pm\frac{1}{2}$ 时的 $T^{(+)}_j(E)$. 若使用 C–G 系数表❷进行計算，$m=m_0$, $m'=0$ 时，

$$\langle \boldsymbol{k}m|T^{(+)}(E)|\boldsymbol{k}_0m_0\rangle=\left(\frac{dE}{dk}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right)\sum\left[(l+1)T^{(+)}_{l+}+lT^{(+)}_{l-}\right]\frac{P_l(\cos\theta)}{4\pi}, \tag{15.8}$$

$m=-m_0=\pm\frac{1}{2}$，从而 $m'=\mp1$ 时，

$$\left\langle \boldsymbol{k}\pm\frac{1}{2}|T|\boldsymbol{k}_0\mp\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$=\left(\frac{dE}{dk}\right)\left(\frac{1}{k^2}\right)\sum_l(\pm1)\left(T^{(+)}_{l+}-T^{(-)}_{l}\right)P_l^{\prime}(\cos\theta)\sin\theta\exp\frac{\pm i\varphi}{4\pi}. \tag{15.9}$$

---

❶ 有关 C–G 系数，参見本丛书《回轉群与对称群的应用》一书。

❷ 参見本丛书《回轉群与对称群的应用》一书。

这里
$$P_l'(x)=\frac{dP_l(x)}{dx},$$
也就相当于例1的(15.4)。但在低能情况下，如第1章中所示，只有当l的值較小时才不适用，所以在分析截面时，例如，只剩下$l=0, 1$，使用此式才为有效。

凡对具有任意自旋粒子的情况，都可进行同样的分解。参看 Blatt & Biedenhahn: Rev. Mod. Phys., **24** (1952), 258。

問題 1 試証

$$\left\langle l\,\frac{1}{2}m'm|JM\right\rangle\left\langle JM|l\,\frac{1}{2}m_0'm_0\right\rangle$$
$$=\left\langle l\,\frac{1}{2}\,m'm\,|P_l^{\pm}|\,l\,\frac{1}{2}\,m_0'm_0\right\rangle,$$
$$\left.\begin{aligned}P_l^+&=\frac{(l+1+L\sigma)}{(2l+1)},\quad j=l+\frac{1}{2},\\ P_l^-&=\frac{(l-L\sigma)}{(2l+1)},\quad j=l-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{15.10}$$

在(9.17)下面的式中，取(φ, χ)为A的本征函数时，$A=\sum\lambda_n\varphi_n\varphi_n^\dagger$。現在的情况是，若設$A=J^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)$，或$=J^2-\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)$，则可得出(15.10)。$P_l^{\pm}$是选$j=l\pm\frac{1}{2}$时耦合成的投影算符，$(P_l^{\pm})^2=P_l^{\pm}$，$P_l^++P_l^-=1$。由此可見，不使用C-G系数，而使用(15.10)也可求出(15.8)。

問題 2 在两个自旋为$\frac{1}{2}$的粒子时，首先只将自旋耦合，然后就$S=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$，$S=0$及$S=1$分别做周相移分析。試作出$S=1$的式子。

§16 精細均衡

a, b两个态之間的跃迁概率已由(12.6)給出。若将此式作 Born 近似，則
$$w_{ab}=w_{ba}\tag{16.1}$$
成立。上式表明$a\to b$过程及其逆过程$b\to a$具有相同的跃迁概率。就截面說来，設v为相对速度，ρ为态密度，从

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_{ba}}=\left(\frac{v_b}{v_a}\right)\left(\frac{\rho_b}{\rho_a}\right) \tag{16.2}$$

就能由一个截面求出其逆过程的截面。这对核反应的分析等是很有用的。在統計力学基础中也使用 (16.1) 的关系[1]。

(16.1) 尽管是在 Born 近似之下得出的，但对于一般条件下的更广的形式仍是成立的。这是因为 Hamiltonian H_0 及 V 对时間反演是不变的。首先我們来說明一下时間反演。在古典力学中，时間反演的不变性建立在这样的結論上，即当力 f 对 $t\to -t$ 不变时，Newton 运动方程 $\frac{d^2x}{dt^2}=f$ 对于 $t\to -t$ 也不变[2]。同样就 Schrödinger 方程

$$\frac{i\partial\psi}{\partial t}=H\psi(t)$$

考虑时，为了使它在 $t\to -t$ 时保持不变，只需在时間反演时令对应于 $\psi(t)$ 的波函数 $\psi^\tau(t)=\psi^*(-t)$ 即可。当 ψ 含有自旋等时，运用更一般的么正变换 R，即設

$$\psi^\tau(t)=R\psi^*(-t). \tag{16.3}$$

若无自旋，則 $R=1$. 把某可观察的力学量 A 的时間反演 A^τ，按期望值各向相同的原理

$$(\psi^\tau(0),\ A^\tau,\ \psi^\tau(0))=(\psi(0),\ A,\ \psi(0)) \tag{16.4}$$

定义作

$$A^\tau=RA^TR^\dagger, \tag{16.5}$$

其中 A^T 为 A 的轉置矩陣。与空間反演不同的是 $\boldsymbol{x}^\tau=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}^\tau=-\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{L}^\tau=-\boldsymbol{L}, \boldsymbol{\sigma}^\tau=-\boldsymbol{\sigma}$[3]. 从而对于态矢量，

---

[1] 例如，參看伏見著：概率論及統計論(河出书店)。

[2] 在 Lorentz 力的情况下，$\boldsymbol{f}=e\boldsymbol{E}+\left(\frac{e}{c}\right)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$，当 $t\to -t$ 时，$\boldsymbol{v}\to -\boldsymbol{v}$，但因受 $\boldsymbol{B}\to -\boldsymbol{B}$ 制約，所以不变。

[3] 若考虑 $p=-i\partial_x$ 时，如同 $\boldsymbol{p}^\tau\to\boldsymbol{p}$ 一样，也可看出。确切地說，在 x 表象中 $\langle x|p_x|x\rangle=-i\partial_x\delta(x-x')$，在 $R=1$ 时应用 (16.5)，$\langle x'|p_x^\tau|x\rangle=\langle x|p_x|x'\rangle=i\partial_x\delta(x-x')=-\langle x'|p_x|x\rangle$，并且 $\boldsymbol{p}^\tau=-\boldsymbol{p}$.

$$|\boldsymbol{k}\rangle \rightarrow R|\boldsymbol{k}\rangle^* = |-\boldsymbol{k}\rangle, \ |\boldsymbol{k}, m\rangle \rightarrow R|\boldsymbol{k}m\rangle^* = |-\boldsymbol{k}, -m\rangle.$$

当 $A^\tau = A$ 时，就說 A 对于时間反演是不变的。若 H_0, V 对时間反演不变，則 S' 也同样是不变的。由 (9.22) 式的 S 式及 T 的級数展开式，$T^\tau = T$，从而有

$$S^\tau = RS^TR^\dagger = S.$$

以 ψ_b, ψ_a^* 挾在 $R^\dagger SR = S^T$ 两边时，

$$\langle b^\tau|S|a^\tau\rangle = \langle a|S|b\rangle. \tag{16.6}$$

从而

$$w(a\rightarrow b) = w(b^\tau \rightarrow a^\tau). \tag{16.7}$$

这是 (16.1) 的一般化的表达式。

現在用簡单的例子来說明它的具体意义。首先我們用古典力学的方法来考虑在某力作用之下一个质点的运动。設在 $-T \leqslant t \leqslant T$ 之間的坐标与动量为 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}(t)$，$\boldsymbol{k}(t) = \boldsymbol{g}(t)$. 其相反的运动是 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(-t)$，$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{g}(-t)$. 这个运动是可以被实現的，即在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(T)$，$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{g}(T)$ 的初始条件下，为了使它按 $\boldsymbol{x} = f(-T)$，$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{g}(-T)$ 进行，力对于时間反演保持不变就是充分的条件。在量子力学中，与此相应，对于 $\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{k}(-T) \rightarrow \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}(T)$ 的振幅，当 $T \rightarrow \infty$ 时，由 $\langle \boldsymbol{k}_1|S|\boldsymbol{k}_0\rangle$ 給出，于是，如果 S 对于时間反演保持不变的話，那就是說，这两者是相等的。



图 16.1

問題1　試証 (16.3) 中 $H^{\tau}=H$ 时，R与 t 无关。

問題2　試証 $H^{\tau}=H$ 时，(16.4) 对于任意时刻都成立。

問題3　試証对于自旋为 $\frac{1}{2}$ 的粒子，由 $\sigma^{\tau}=R\sigma^{T}R^{\dagger}=-\sigma$　(σ 取为 Pauli 表象) 有 $R=\sigma_y$ 成立。

問題4　試証当 H_0, V 对时間反演不变时，有 $U^{(\pm)\tau}=U^{(\mp)\dagger}$，并說明其物理意义。

最后，我們来談談有很大用处的精細均衡的例子。即利用反应式



$$\pi^{+}+\mathrm{d}\rightleftarrows\mathrm{p}+\mathrm{p} \tag{16.8}$$

决定 π 介子的自旋。其中 p 是质子，d 是氘核。

(16.8) 的 S 矩陣在对于时間反演不变的假定之下，向右的反应与向左的反应的截面之比，π 介子的自旋，以及此后仅能用可直接测定的力学量来表示的問題——就成为我們討論的中心。

下面把它用公式表达。

設此式的左，右系統的相对动量分别为 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$，因为 d 的自旋为1，故令其 z 方向分量为 m，两个 p 的自旋的 z 方向分量为 m_1, m_2。向右反应的 T 矩陣为

$$\langle \boldsymbol{k}'m_1m_2|T|\boldsymbol{k}m\rangle.$$

假定对于时間反演不变，即

$$\langle -\boldsymbol{k}-m|T|-\boldsymbol{k}'-m_1-m_2\rangle=\langle \boldsymbol{k}'m_1m_2|T|\boldsymbol{k}m\rangle. \tag{16.9}$$

而 $\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{k}'$ 的向右反应截面为

$$d\sigma(\rightarrow)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{k'^2}{vv'}\frac{1}{2\cdot3(2s+1)}\sum_{m,m_1,m_2}|\langle \boldsymbol{k}'m_1m_2|T|\boldsymbol{k}m\rangle|^2, \tag{16.10}$$

其反方向 $-\boldsymbol{k}'\to-\boldsymbol{k}$ 的向左反应截面为

$$d\sigma(\leftarrow)=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{k^2}{vv'}\frac{1}{4}\sum_{m,m_1,m_2}|\langle -\boldsymbol{k}-m|T|-\boldsymbol{k}'-m_1-m_2\rangle|^2. \tag{16.11}$$

在以上各反应中都沒有指定自旋，所以其初态的自旋是取的平均，而末态是取的求和。s 是 π 介子的自旋。(16.10) 的 $\frac{1}{2}$ 因子是因为按 Pauli 原理，其相空間的体积成为一半之故。v, v' 是它們的相对速度。注意 (16.9)，作 (16.10) 与 (16.11) 的比时，得

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\sigma(\leftarrow)}=\frac{2}{3(2s+1)}\left(\frac{k'}{k}\right)^2. \tag{16.12}$$

这就是所要求的式子。将两个反应截面用相应的能量及角度測量时，就可定出 S. 实际上，π^+ 介子的自旋已确定为 0. 这种确定方法之所以有用，就在于应用它进行討論时，可以不涉及到 π 介子和核子之間的力的有关的具体性质。

第5章　建立在場論上的散射問題

正象第2章中所指出的，場論中的散射問題，其散射原因也有不以势能来描述的情况。

例如，以光的散射为例，入射光被散射体吸收，然后再以相同的或不同的頻率朝着不同的方向放射出去。

就这样，光子忽而被吸收，忽而被放出，而場的量子理論就是研究这种現象的数量变化关系的。这里，为了說明場的理論，我們从介子場的理論当中选出較簡单的作为例子。因此，以下将場的量子称为介子，又称場源的粒子为核子。

到目前为止，由S矩陣来求散射截面的原則是完全沒有改变的，但在場的量子理論中，我們将会碰到新的重大問題。由于介子場与核子的相互作用，会引起介子的产生与消失，故其結果，核子将永远在它的周圍携带着一定的介子場(所謂自生場)。这个自生場将又对場源的核子起着反作用，其結果，核子的能量就轉給了所謂自能部分，也就是說，不論何时，它都是与核子并存着的，所以必須把它看作是核子固有能量的一部分。

作为自生場的反作用影响的另一种表現，就是为确定相互作用的强度，必須要有一个所謂重整化的处理方法。闡明这些問題就是本章的目的。

作为例子，选擇中性(中性即不带电)标(Scalar)介子場，一开始我們将在§17中闡述場的量子化，在§18中来处理与核子的相互作用。§19将处理荷电标介子場(电荷上有正，負)的核子引起的散射，并說明相互作用常数的重整化。

§17 場的量子化

設想以 $\varphi(xt)$ 这样一个实函数就足以表示时空 tx 的場的情况。

我們首先从不使用量子論开始。設 φ 滿足下列場的方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi+m^2\varphi=0. \tag{17.1}$$

已知平面波是它的一个本征函数，設

$$\varphi=e^{i\lambda t}\Phi(\boldsymbol{x}),$$

$$\Phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\quad[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=k_xx+k_yy+k_zz], \tag{17.2}$$

則得 $$\lambda=\pm\sqrt{k^2+m^2}.$$

以下，我們令 $\sqrt{k^2+m^2}\equiv\omega$. 現在把 φ 設想为实値，并且設展开定理适用，則有

$$\varphi=\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{ikx}[e^{-i\omega t}a(\boldsymbol{k})+e^{i\omega t}a^*(-\boldsymbol{k})]$$

$$((d\boldsymbol{k})=dk_xdk_ydk_z). \tag{17.3}$$

現在我們来考慮它与量子論的对应。指数函数

$$\exp i\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\sqrt{m^2+k^2}t\right]$$

是动量为 $\boldsymbol{k}$，静止质量为 m 的介子作自由直綫运动时，1个介子的波函数❶。不过这种所謂介子个数的概念在(17.3)中是不明显的，而在計算伴随 φ 的場的总能时，我們得到

$$H=\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+(\operatorname{grad}\varphi)^2+m^2\varphi^2\right](dx)=\int(d\boldsymbol{k})\omega_k|a(\boldsymbol{k})|^2,$$

所以，可以认为 $|a(\boldsymbol{k})|^2$ 与具有动量 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数成比例，而在古典的理論中是沒有这种必須把个数的数值限于整数的理由的。下面

❶ 把 $\exp\{-i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t]\}$ 考慮为对 $\exp i[kx-\omega t]$ 所进行时空的反演，在(17.3)中随 $a(\boldsymbol{k})$ 出現 $\exp[-i\omega t]$，随 $a^*(\boldsymbol{k})$ 出現 $\exp[i\omega t]$，这在量子論中，是与在(17.20)中 $a(\boldsymbol{k})$ 是粒子的消灭算符，$a^*(\boldsymbol{k})$ 是粒子的产生算符相联系着的。

我們将(17.3)改写为

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t)=\int \frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{ikx} Q(\boldsymbol{k}:t) \tag{17.3'}$$

假如把 Q 設想成为和时間同时变化的力学变量，将(17.3′)代入(17.1)就得关于 Q 的运动方程

$$\ddot{Q}(\boldsymbol{k}, t)+(m^2+k^2)Q(\boldsymbol{k}, t)=0 \tag{17.4}$$

(字母上加点表示对时間的导数)。(17.4)正是具有频率 $\pm\omega$ 的諧振子的运动方程，即使在 $\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}$ 时，(17.4)也还是同样的，因而为了滿足 φ 是实値的条件

$$Q^*(\boldsymbol{k}:t)=Q(-\boldsymbol{k}:t),$$

需要做一番努力。現用实値 $\cos \boldsymbol{kx}$, $\sin \boldsymbol{kx}$ 来代替 e^{ikx},

$$\varphi(xt)=\int_{>0}(dk)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{8} q_i(kt)\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} k_x x\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} k_y y\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} k_z z \tag{17.3''}$$

时，$q_1\sim q_8$ 就是实値的力学变量。但 $\boldsymbol{k}$ 的积分不仅限于在第一象限(k_x, k_y, $k_z>0$)内进行的。$q_1\sim q_8$ 对应于 cos 和 sin 的8种組合。有

$$H=\frac{1}{2}\int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+(\operatorname{grad}\varphi)^2+m^2\varphi^2\right)(dx)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\left\{\int(d\boldsymbol{k})H(\boldsymbol{k})_i\right\},$$

$$H(\boldsymbol{k})_i=\frac{1}{2}[\dot{q}_i^2(\boldsymbol{k}t)+(m^2+k^2)q_i^2(\boldsymbol{k}t)]. \tag{17.5}$$

总之，对于其中一种子式❶ $\boldsymbol{k}$ 的 Hamiltonian 好象与由

$$H(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2}[p(\boldsymbol{k})^2+(m^2+k^2)q(\boldsymbol{k})^2] \tag{17.5'}$$

所得出的振子相对应的，其共軛动量 p 定义为

$$p=\dot{q}. \tag{17.6}$$

❶ 原书用モード(模型)，这里譯为"子式"，以下同。——譯者注

为使計算簡单起見，先对一个子式来开始討論。

在此，当推置于量子論时，p, q 可以用滿足对易关系

$$[p, q]=pq-qp=\frac{1}{i} \tag{17.7}$$

的算符来代换，(17.5′) 是 p, q 的二次式，因此利用它来改写时，对于諧振子的处理就变得非常方便。

首先来考虑如下的綫性組合：

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}q+i\frac{p}{\sqrt{\omega}}\right), \tag{17.8}$$

$$a^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}q-i\frac{p}{\sqrt{\omega}}\right).$$

由 (17.7)，得 a, a^* 的对易关系为

$$[a, a^*]=1. \tag{17.9}$$

由 (17.8)，得

$$q=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a+a^*), \quad p=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a-a^*). \tag{17.8′}$$

故 Hamiltonian $H(\boldsymbol{k})$ (17.5) 就能写成

$$H=\omega\left(a^*a+\frac{1}{2}\right).$$

下面来証明若 a, a^* 滿足 (17.9) 的对易关系，则 a^*a 的本征值就不为負整数。首先，我們設 a^*a 的本征值是 n', n'', …，其对应的規格化的波函数为 ψ', ψ'', …. 从对易关系 (17.9) 可得出算符方程

$$a^*a\cdot a-a\cdot a^*a=-a. \tag{17.10}$$

由

$$a^*a\psi'=n'\psi' \tag{17.11}$$

又可得出 $n'=(\psi', a^*a\psi')=|a\psi'|^2\geqslant 0$，所以 n' 不为負。但由 (17.10)，必成立等式：

$$\left.\begin{array}{l} a^*a\cdot(a\psi')=(n'-1)(a\psi'), \\ a^*a(a^*\psi')=(n'+1)(a^*\psi'), \end{array}\right\} \tag{17.12}$$

这表示 $a\psi'$ 是对应于 a^*a 的本征值 $n'-1$ 的本征函数。由此可知 a^*a 的最小本征值是 0．若令其本征函数为 ψ_0，則 $a\psi_0$ 就等于 0．这是因为，如果它不是 0，那末它将成为 a^*a 的对应于本征值 -1 的本征函数。由此又可知 a^*a 的本征值全体为 0, 1, 2, ….

如果对应于本征值 n 的本征函数 ψ_n 被規格化，則得

$$(\psi_n aa^*\psi_n)=n+1, \tag{17.13}$$

所以可令

$$(\psi_n a\psi_{n+1})=(\psi_{n+1}a^*\psi_n)=\sqrt{n+1}. \tag{17.14}$$

(17.14) 表明 ψ_n 是可以由 ψ_0 作出的：即有

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}a^{*n}\psi_0 \tag{17.15}$$

成立。a^* 是使 n 数値增加了 1 的算符，a 是減少了 1 的算符：故称 a^* 为产生算符，称 a 为消灭算符。

于是如上所述，对各个子式 $\boldsymbol{k}$ 应用量子化了的振幅，就可以从(17.3′)，(17.8′)（詳細地說，由(17.3″)的 cos, sin 返回到(17.3′)❶）得到

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{a(\boldsymbol{k})+a^*(-\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega_k}}. \tag{17.16}$$

这就是 Schrödinger 表象的算符令其与古典理論中的 $t=0$ 相对应即可。$a(\boldsymbol{k})$，$a^*(\boldsymbol{k})$ 作用的波函数根据 Hamiltonian

$$H=\int d\boldsymbol{k}\omega_k a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) \tag{17.17}$$

能确定其随时間的变化。在(17.17)中，对各个子式 $\boldsymbol{k}$ 都存在着

❶ 为了确定場是用实値来表示，就必須插入对(17.3″)的討論。又，实値的力学量是必須用 Hermite 算子来表示的。

$\frac{1}{2}$ 的所謂零点能，因为它是 Hamiltonian 的附加常数，故而省略。

假如能让算符与时間同时变化，而本征函数保持不变，我們就能将算子 A 置换为

$$e^{iHt}Ae^{-iHt}.$$

这里，由于

$$a^*a\cdot a^*=a^*\cdot(a^*a+1),\quad a^*a\cdot a=a(a^*a-1),\qquad (17.10')$$

所以，把(17.16)的 φ 用 Heisenberg 表象写出时，就立刻得知

$$\varphi(xt)=\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}e^{ikx}[a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t}+a^*(\boldsymbol{k})e^{i\omega t}].\qquad (17.18)$$

与量子化了的(17.3)比較，可見其不同之处仅在于量子化这一点。产生算符，消灭算符正如同(17.16)所表示那样，对于本征值 n 仅具有非对角綫的矩陣元，所以不能象古典理論的情形那样，直接把其数值拿来討論。但是，根据 Bohr 的对应原理："在量子数 n 大时，量子力学就向古典力学过渡，"考慮大的 n 的情形，并忽略 n 和 $n+1$ 之差，且不考虑 ψ_n,ψ_{n+1} 是不同态时，令 $a,\ a^*\sim\sqrt{n}$ 是可以的。也就是向古典力学 $|a|\propto\sqrt{n}$ 过渡。

場的总 Hamiltonian (17.19)是可以用产生算符、消灭算符表出的，但若对 φ 导入共軛量 π：

$$\pi(xt)=\dot{\phi}(xt)=\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{ikx}\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}[a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_k t}-a^*(\boldsymbol{k})e^{i\omega t}],\qquad (17.19)$$

则 $$H=\frac{1}{2}\int d^3x[\pi(xt)^2+\text{grad}\,\phi(xt)^2+m^2\phi^2(xt)].\qquad (17.20)$$

这就是用各点 x 的 $\phi(xt)\dot{\phi}(xt)$ 来代替质点力学的粒子的位置速度，在自由度是无限大时也用与质点力学相同的步驟来定义 Hamiltonian。

§18 具有相互作用的場合

前节所考虑的介子場，假如是其自身单独脫离而存在的話，就沒有什么物理上的意义。在与其他物质相互作用时，我們就能够认識它的性质。这里，第一步我們来处理相互作用，其次再研究一下与介子相互作用的核子处在一个場中的情况。設核子质量为无限重，并在空間各处的附近是以在时間上不变的密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ 分布的。也就是說

$$\int \rho(\boldsymbol{x})\,(d\boldsymbol{x}) = 1, \tag{18.1}$$

$\rho(\boldsymbol{x})$ 为球对称的，且为实值。

这时整个体系(場)+(电荷)的 Hamilton 函数 H 是前节(17.7)的場的 Hamiltonian (标記为 H_0) 与电荷跟場的相互作用的 Hamiltonain (用 V 标記)的和：

$$H = H_0 + V. \tag{18.2}$$

根据与經典电动力学相比較而作的类推可以得出其相互作用

$$V = g\int \rho(\boldsymbol{x})\,\varphi(\boldsymbol{x}, t)\,(d\boldsymbol{x}). \tag{18.3}$$

φ 是 a 或者 a^* 的一次函数，于是这种相互作用恰好能用以描述为了使核子存在，介子忽而被吸收忽而被放出的作用。g 表示核子和介子之間的相互作用的强度，这也有称为介子电荷的。若 $\rho(\boldsymbol{x})$ 用 Fourier 积分来表示，

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\, e^{ikx} v(\boldsymbol{k}). \tag{18.4}$$

又由于 $\rho(\boldsymbol{x})$ 是球对称的，故有 $v(-\boldsymbol{k}) = v^*(\boldsymbol{k}) = v(\boldsymbol{k})$。用此改写(18.3)得

$$V = g\int (d\boldsymbol{k})\, v(k) \sqrt{\frac{1}{2\omega}}\,[a(\boldsymbol{k})e^{-i\omega t} + a^*(\boldsymbol{k})e^{i\omega t}]. \tag{18.3'}$$

但在 (18.3)，(18.3′)中，由于消去了本征函数的时間变化而表示出算子的时間变化，于是問題就得到了解决：这也就是§10的所謂相互作用表象❶。

由(17.19)可清楚地看出 H_0 仍为对角綫矩陣，而 V 是非对角綫的。我們的問題在于如何使整个 H_0+V 都成为对角綫形，以及为此又必須作何种計算。

Hamiltonian 为 H_0+V(18.3)时，成为場源的核子的密度在时間上是不变的，因此核子所产生的介子場也不随时間而变化。令不依时間而变化的場的 Green 函数为 $G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$，它滿足

$$(-\Delta^2+m^2)G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

因而

$$G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{18.5}$$

从而以密度 $\rho(\boldsymbol{x}')$ 分布的圍繞核子靜止的場就滿足

$$(-\Delta^2+m^2)\phi_0=-g\rho,$$

因此得出

$$\phi_0(\boldsymbol{x})=-g\int d\boldsymbol{x}'G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\rho(\boldsymbol{x}'). \tag{18.6}$$

将 ϕ_0 从場 ϕ 中分离，設

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi'(\boldsymbol{x},t)+\phi_0(\boldsymbol{x}), \tag{18.7}$$
$$\pi(\boldsymbol{x},t)=\pi'(\boldsymbol{x},t),$$

使用新变数，Hamiltonian 就成为

$$H=\frac{1}{2}\int(\pi'^2+(\nabla\phi')^2+m^2\phi^2)dx-W, \tag{18.8}$$

$$W=-\frac{1}{2}g\int\rho(\boldsymbol{x})\phi_0(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{g^2}{4\pi}\iint d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')\frac{e^{-m|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}. \tag{18.9}$$

---

❶ 用 Schrödinger 表象时，可得消去 $e^{\pm i\omega t}$ 的(18.3′)：在(18.3)中 $\varphi(xt)$(17.20)以 $\varphi(x)$(17.18)表示。

H 的第1项与自由介子場的 Hamiltonian 具有完全相同的形式；故用 ϕ' 所标記的介子与核子就沒有相互作用。W 是核子为了使与在自己周圍所产生的介子有相互作用而具有的能量，称为核子的自能。将 W 用 $\rho(\boldsymbol{x})$ 的 Fourier 分量 $v(k)$ 写出时，有

$$W=\frac{g^2}{2}\int d\boldsymbol{k}\,\frac{v(k)^2}{\omega^2}. \tag{18.9'}$$

下面，我們将用量子力学的观点来討論同一問題。若将場用 $a(\boldsymbol{k}),a^*(\boldsymbol{k})$ 来表示，并用 Schrödinger 表象，則得

$$H=\int d\boldsymbol{k}\left\{\omega a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+\frac{g}{\sqrt{2\omega}}v(k)\left(a(\boldsymbol{k})+a^*(\boldsymbol{k})\right)\right\}. \tag{18.10}$$

为使它对角化，作下列变换即可：

$$a(\boldsymbol{k})=a'(\boldsymbol{k})-\frac{g}{\sqrt{2\omega^3}}v(k),$$

$$a^*(\boldsymbol{k})=a'^*(\boldsymbol{k})-\frac{g}{\sqrt{2\omega^3}}v(k). \tag{18.11}$$

这样，若采用新的变数 $a'(\boldsymbol{k}),a^{*\prime}(\boldsymbol{k})$，則

$$H=\int d\boldsymbol{k}\omega a^{*\prime}(\boldsymbol{k})a'(\boldsymbol{k})-W. \tag{18.12}$$

这和(18.8)完全相同。也很容易判明变换(18.11)与(18.7)是完全相同的。

然而(18.11)是由变数 a, a^* 到 a', $a^{*\prime}$ 的么正变换。实际上，使用么正矩陣

$$U=\exp\left\{g\int d\boldsymbol{k}v(k)\frac{1}{\sqrt{2\omega^3}}\left(a(\boldsymbol{k})-a^*(\boldsymbol{k})\right)\right\}, \tag{18.13}$$

并把指数函数展开来計算时，可以証明

$$a'(\boldsymbol{k})=Ua(\boldsymbol{k})U^+, \tag{18.14}$$
$$a^{*\prime}(\boldsymbol{k})=Ua^*(\boldsymbol{k})U^+.$$

应用此式，(18.10)就可改写为

$$H=U\left(\sum\omega a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-W\right)U^+=U(H_0-W)U^+. \tag{18.15}$$

从而 U 是使 Hamiltonian 对角化的变换函数。令 H_0 的本征态为 Φ，則 H 的本征函数 Ψ 为

$$\Psi = U\Phi. \tag{18.16}$$

又若令对应于 Φ 的 H_0 的本征值为 E_0，則在 Ψ 态上的 H 的本征值就成为 $E_0 - W$，卽只是移动了 $-W$。

例如，最低能量状态可由任何 $n(\boldsymbol{k})=0$ 时的 Φ 导出，且設为 Φ_0，于是 $a(\boldsymbol{k})\Phi_0=0$。为使 U 作用于 Φ_0 上，首先要作如下之变式：

$$U=\exp\left[-g\int d\boldsymbol{k}\, v(k)\frac{1}{\sqrt{2\omega^3}}a^*(\boldsymbol{k})\right] \cdot\exp\left[-\frac{g^2}{2}\int d\boldsymbol{k}\, v(k)^2\frac{1}{\omega^3}\right]\exp\left[g\int d\boldsymbol{k}\, v(k)\frac{1}{\sqrt{2\omega^3}}\, a(\boldsymbol{k})\right]. \tag{18.17}$$

象这样，把产生算符归集到左边，消灭算符归集在右边，我們称之为整列。而此公式的导出可应用公式

$$\exp(A+B)=\exp A\cdot\exp\left\{B+\frac{1}{2}[B,\ A] +\frac{1}{6}([[A,\ B],\ B]+[[B,\ A],\ A])+\cdots\right\}, \tag{18.18}$$

由(18.17)直接得出

$$\Psi_0=U\Phi_0=\exp\left[-\frac{1}{2}g^2\int d\boldsymbol{k}\ \frac{v^2(k)}{\omega^3}\right] \cdot\exp\left[-g\int d\boldsymbol{k}\, v(k)\frac{1}{\sqrt{2\omega^3}}\, a^*(\boldsymbol{k})\right]\Phi_0. \tag{18.19}$$

将右边有关 a^* 的指数函数展开，就可知道在 Ψ_0 中是混有各种各样的具 N 个介子的状态 $\Phi(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\cdots\boldsymbol{k}_N)$ 的。在 $H=H_0+V$ 的最低本征态中，所有 $a'^*(\boldsymbol{k})a'(\boldsymbol{k})$ 都是 0，因而当我們用 H_0 的本征态展开时，$a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ 就成为非 0 状态的迭合。这就表示在核子周圍有介子云存在。

§19 介子散射与重整化

在前节中已将靜止的核子問題严格地解出了。这一点，如同(18.17)所示，是由于使总 Hamiltonian 成为对角形的变换函数具有簡单的构造之故。(18.17)中的 $\exp\left[g\int(d\boldsymbol{k})\frac{v(k)a(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega^3}}\right]$还可再进一步分解而考虑为对各个 $\boldsymbol{k}$ 乘上 $\exp\left[g\frac{v(k)a(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega^3}}\right]$的积 $\prod_{\boldsymbol{k}}\exp\left[g\frac{v(k)a(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega^3}}\right]$. 对于产生算符的部分也是同样的。这表示在不同的子式 $\boldsymbol{k}$ 之間有相互作用 V 时，也不会发生相关。这就是能簡单解出的理由，同时也是一点也不引起散射的理由。

作为处理相互作用的下一步驟，我們来討論能引起散射的例子。但在这里，我們不能求得其精确的解，故必須要用某一个近似的解来满足它。作为这种例子中的較簡单的情形，我們取圍繞靜止核子的荷电介子的散射。

核子也就是质子(+1)，或是中子(0)的狀态(括号內是电荷)。介子具有正，負电荷(±1)两种。把质子，中子各用 P, N 表示，正負介子用 π^+, π^- 表示。由于电荷守恒，故只能引起下列反应：



$$\left.\begin{aligned}P+\pi^- &\rightleftarrows N,\\ N+\pi^+ &\rightleftarrows P.\end{aligned}\right\}\qquad(19.1)$$

将态 P, N 的区别用下列矩陣記号来表示是很方便的。体系的本征函数分成为二分量，即质子和中子态各用下式表示：

$$\Psi_P=\begin{pmatrix}\psi\\0\end{pmatrix},\quad \Psi_N=\begin{pmatrix}0\\\psi\end{pmatrix}.\qquad(19.2)$$

此时，下列矩陣 Q, Q^* 将会各自引起 $N\to P$, $P\to N$ 的变化：

$$Q=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Q^*=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\qquad(19.3)$$

$$Q\Psi_N=\Psi_P,\ Q^*\Psi_P=\Psi_N,\ Q\Psi_P=0,\ Q^*\Psi_N=0.\qquad(19.3')$$

π^+ 的产生算符、消灭算符用 a^*, a 表示，π^- 的用 b^*, b 表示。而介子場的 Hamiltonian 是它們两者之和：

$$H_0=\int(d\boldsymbol{k})\sqrt{m^2+k^2}\,(a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+b^*(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})). \quad (19.4)$$

由(19.1)，(19.3)，幷替代(18.4)，相互作用 Hamiltonian 可設为

$$V=g\int\frac{(dk)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{v(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega}}[Q(b^*(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k}))+Q^*(a^*(\boldsymbol{k})+b(\boldsymbol{k}))]. \quad (19.5)$$

称能自由远离的介子为自由介子。以下我們用微扰論来考察一下存在有一个自由介子的状态的本征函数。

我們称自生場中不能远离的介子为束縛介子。

如果将微扰計算进行到高次項，也就是說，使它不含有再返回到計算的出发点的那种过程。若把这种过程加入，也就等于对整个波函数乘上常数因子，又若形式地計算这个因子，便得 $e^{\pm i\infty}$，这就等于在計算过程中插入了一些不必要的无限大。欲詳細理解上述情形，我們只需把中途返回到出发点时，以及把最后返回时看作为出发点的情況来与以后不再返回时的情況作比較即可。Brillouin-Wigner 的微扰公式就避开了这种由中途返回到出发点的不方便的情况。把 H_0+V 的本征值，本征函数各用 ε,Ψ 表示，H_0 的本征值和被規格化了的本征函数用 E_n, ϕ_n 来表示，即

$$(H_0+V)\Psi=\varepsilon\Psi, \quad (19.6)$$

$$H_0\Phi_n=E_n\phi_n, \quad (19.7)$$

这里，用 ϕ_n 展开 Ψ 时，得

$$\Psi=\sum_m a_m\phi_m. \quad (19.8)$$

現在我們来求当 $V\to0$ 时 $\Psi\to\phi_n$, $\varepsilon\to E_n$ 的解。此时設

$$a_n=1, \quad (19.9)$$

幷把(19.8)，(19.9)代入(19.6)，就可以知道其余的 $a_m(m\neq n)$ 由下式确定：

$$a_m=\frac{(m|V|n)}{\varepsilon-E_m}+\sum_{l\neq n}\frac{(m|V|l)(l|V|n)}{(\varepsilon-E_m)(\varepsilon-E_l)}$$
$$+\sum_{\substack{k\neq n\\ l\neq n}}\frac{(m|V|k)(k|V|l)(l|V|n)}{(\varepsilon-E_m)(\varepsilon-E_k)(\varepsilon-E_l)}+\cdots, \quad (19.10)$$

又 ε 由下式确定：

$$\varepsilon=(\phi_n\varepsilon\Psi)=(\phi_n(H_0+V)\Psi)=E_n+\sum_m(n|V|m)a_m$$
$$=E_n+\sum\frac{(n|V|m)(m|V|n)}{\varepsilon-E_m}+\cdots. \tag{19.11}$$

由于(19.11)右边也含有 ε，因此必須认为已給出的是关于 ε 的隐函数。

假如把体系的本征函数用 H_0 的本征函数展开，且把在 H_0 的本征函数中存在有核子 $\boldsymbol{P}$ 和动量为 $\boldsymbol{k}_1^+\boldsymbol{k}_2^+\cdots\boldsymbol{k}_n^+$ 的 π^+ 以及动量为 $\boldsymbol{k}_1^-\cdots\boldsymbol{k}_m^-$ 的 π^- 的，用

$$\phi(\boldsymbol{P}:\boldsymbol{k}_1^+\cdots\boldsymbol{k}_n^+:\boldsymbol{k}_1^-\cdots\boldsymbol{k}_m^-)$$

来表示。在核子 N 的場合也用相同的記法，并用这些 ϕ 来展开体系的本征函数。

下面，我們来看一下，向着 P 入射动量为 $\boldsymbol{k}_0$ 的 π^- 时的情况。設由 n 次微扰中所得出的項用 $\Psi^{(n)}$ 表示，則其第0次的項(图19.1)为

$$\Psi^{(0)}=\phi(P:\boldsymbol{k}_0^-). \tag{19.12}$$

其次，我們来求由1次微扰論导出的項。由于 $\boldsymbol{k}_0^-$ 是 P 消失的項(图19.1(1-a))，$\boldsymbol{k}^+$ 是由 P 所产生的項(图19.1(1-b))，故

$$\Psi^{(1)}=\frac{g}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1}{+\varepsilon}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\cdot\Phi(N)\right.$$
$$\left.+\sum\frac{1}{\varepsilon-(\omega_0+\omega_k)}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\Phi(N:\boldsymbol{k}_0^-,\boldsymbol{k}_-^+)\right\}. \tag{19.13}$$

現在再对 ε 来探討。設核子的自能为 $-W$，便可确定

$$\varepsilon=\omega_0-W. \tag{19.14}$$

从(19.11)和(19.13)，得

$$\varepsilon=\omega_0-g^2\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3 2\omega_k}\frac{v^2(k)}{(\omega_0+\omega_k-\varepsilon)}+\cdots. \tag{19.15}$$

若把 ε 用 g 的冪次展开，就得

$$\varepsilon=\omega_0-g^2\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}\frac{v^2(k)}{2\omega_k^2}+\cdots. \tag{19.16}$$

我們現在是在作存在着自由介子 $\boldsymbol{k}_0^-$ 状态的計算，和不存在自由

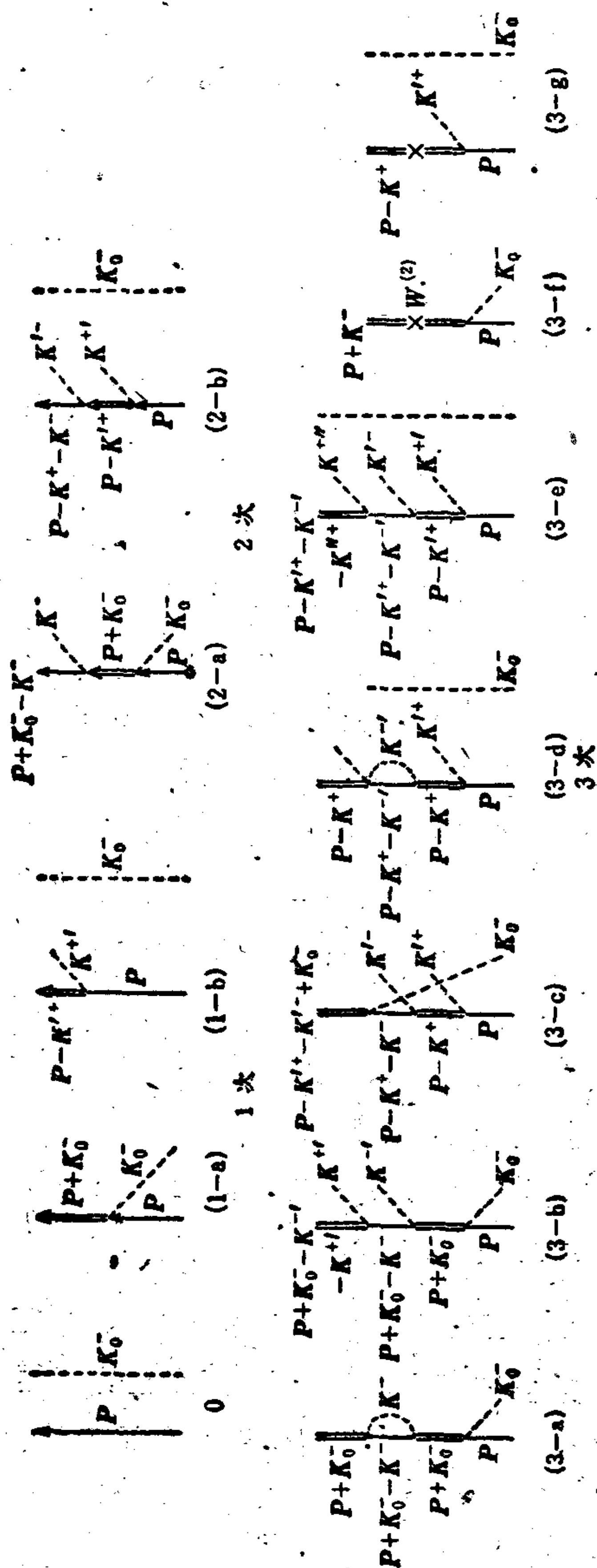


图 19.1

介子状态的計算相比較，就知道在(19.16)中，ω_0 以下的項成为自能 $-W$ 这件事可以确定到任意的次。这里需要注意的是，常常容易把(19.15)看作是剛好沒有将(19.13)的第二項(1-b)列入計算之中的。若考慮 $\phi(P:\boldsymbol{k}^-)$ 的規格化为

$$(\phi(P:\boldsymbol{k}^-),\phi(P:\boldsymbol{k}'^-))=\delta(\boldsymbol{k}^- - \boldsymbol{k}^{-\prime}),$$

計算 $(\phi(P:k_0^-),(H_0+V)\Psi)$，則得

$$(\phi(P:k_0^-),(H_0+V)\Psi)=\delta(0)\left\{\omega_0-g^2\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}\frac{v^2(\boldsymbol{k})}{2\omega_k^2}+\cdots\right\}$$
$$+\frac{g^2v^2(\boldsymbol{k}_0)}{(2\pi)^3 2\omega_0^2}+\cdots. \qquad (19.16')$$

(19.16′)的最后的項是由(19.13)的第一項(1-a)得出的。这种項可以看作是用 $\delta(0)$ 除了以后变为0的項。它具有下列物理意义。不含有(19.16′)的 $\delta(0)$ 的項与向前散射的振幅有密切关系，进一步說，就是介子、核子間由于扰动的散射力而产生的能量(虽然具有与势能同样的意义，但在 x 表象上不能只成为 x 的函数)。散射力的作用圈是有限的，但介子 $\boldsymbol{k}_0^-$ 位在散射力圈外的比例，比在圈内要无限地大。$\boldsymbol{k}_0^-$ 在圈外时，也进行着自生場和核子的相互作用：这是与(19.16′)的第一項中所出現的无限大因子 $\delta(0)$ 相对应的。在势散射情况即使具有势，但也还是与体系的本征值在散射状态中沒有迁移是同一回事。

同样可知，对于存在有自由介子 $\boldsymbol{k}_1^-\cdots\boldsymbol{k}_m^-;\boldsymbol{k}_{m+1}^+\cdots\boldsymbol{k}_n^+$ 的状态，(H_0+V) 的本征值成为 $(\omega_1+\cdots\omega_m+\omega_{m+1}+\cdots\omega_n)-W$。这里把 H_0+V+W 作为 Hamiltonian 来考慮时，其本征值就是 $(\omega_1+\cdots+\omega_n)$，这不仅在处理上是容易了，而且也說明在物理上将靜止核子一个的能量作为基准，来測量体系包含到自能为止的能量值的方法是正确的。若用 V_0+W 来代替至今所用的 V_0，則由(19.10)的微扰公式中的分母 ε 可消去 $-W$。

我們把这种步驟称为核子质量的重整化，或称为自能的消除。当核子质量进行重整化时，本征值就不迁移，因此对散射过程的討論，在第2章以后所讲过的都能照样应用。

下面，我們轉到二次微扰的討論。用 $V+W$ 代替 V 时，W 仍是对角綫形的，因此一次微扰的解答仅在 $\varepsilon=\omega_0$ 时是不改变的。在二次微扰中，我們可以考虑下列两个过程，即

$$\left.\begin{array}{lll}\text{經}(1\text{-a})\to\boldsymbol{k}^-(\neq\boldsymbol{k}_0^-)\text{产生} & & (2\text{-a}),\\ \text{經}(1\text{-b})\to\boldsymbol{k}'^- & \text{产生} & (2\text{-b}).\end{array}\right\}$$

它們均可由下式中的第一項，第二項得出：

$$\Psi^{(2)}=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\left\{\frac{1}{\omega_0-\omega_k+i\varepsilon}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\frac{1}{\omega_0}\Phi(P:\boldsymbol{k}^-)\right.$$
$$\left.+\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{1}{(-\omega_k)(-\omega_k-\omega_k')}\Phi(P:\boldsymbol{k}_0^-\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^+)\right\}.\tag{19.17}$$

由于 W 至少含有 g^2 項，因此在二次微扰中，不呈現重整化的影响。其中在第一項中以 $\boldsymbol{k}^-$ 来代替了最初所有的 $\boldsymbol{k}_0^-$，这就表示在二次微扰中引起了散射。被散射放出的介子必須用外向球面波表示，故，如同第2章所述的，在分母上添加无穷小的虛数部分 $+i\varepsilon$。这里，如果不再作近似，其散射振幅就是

$$T(\boldsymbol{k}:\boldsymbol{k}_0)=\frac{g^2}{(2\pi)^3}\left(\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\right)\frac{1}{\omega_0}.\tag{19.18}$$

下面，我們再轉向三次微扰的討論。

$$\begin{array}{lll}\text{經}(2\text{-a})\to\boldsymbol{k}^-\text{被吸取} & (3\text{-a}),\\ \quad(2\text{-a})\to\boldsymbol{k}^+\text{产生} & (3\text{-b}),\\ \text{經}(2\text{-b})\to\boldsymbol{k}_0^-\text{被吸收} & (3\text{-c}),\\ \quad(2\text{-b})\to\boldsymbol{k}^{-\prime}\text{被吸收} & (3\text{-d}),\\ \quad(2\text{-b})\to\boldsymbol{k}^{+\prime\prime}\text{产生} & (3\text{-e}).\end{array}$$

除此之外，在二次微扰公式的 $V+W$ 中，以 $W^{(2)}=g^2\int\frac{d(k)}{(2\pi)^3}\frac{v^2(k)}{2\omega_k^2}$

代替(19.17)中第二回的 V 所作用的項。

設經(1–a),(1–b)者各为(3–f),(3–g). 它們可按这个次序在下列公式中給出

$$\Psi^{(3)}=\frac{g^3}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}}\Big\{\Big(\frac{1}{\omega_0}\Big)^2\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{2\omega_k}\frac{v^2(k)}{\omega_0-\omega_k+i\varepsilon}\cdot\Phi(N)$$

$$+\frac{1}{\omega_0-(\omega_k+\omega_k')+i\varepsilon}\frac{1}{\omega_0-\omega_k'+i\varepsilon}\frac{1}{\omega_0}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\cdot\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\Phi(N,\boldsymbol{k}^{-\prime}:\boldsymbol{k}^{+})$$

$$+\frac{1}{\omega_0-(\omega_k+\omega_k')+i\varepsilon}\frac{1}{(\omega_k+\omega_k')}\frac{1}{\omega_k}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_0}}$$

$$\cdot\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\Phi(N:\boldsymbol{k}^{-\prime}:\boldsymbol{k}^{+})$$

$$-\Big(\frac{1}{-\omega_k}\Big)^2\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{(dk')}{2\omega_k'}\cdot\frac{v^2(k')}{(\omega_k+\omega_k')}\Phi(N:\boldsymbol{k}_0^-,\boldsymbol{k}^+)$$

$$+\frac{v(k'')}{\sqrt{2\omega_k''}}\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\cdot\frac{(-1)^3}{(\omega_k+\omega_k'+\omega_k'')(\omega_k+\omega_k')\omega_k}\Phi(N:\boldsymbol{k}_0^-\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^+\boldsymbol{k}^{+\prime\prime})$$

$$+\Big(\frac{1}{\omega_0}\Big)^2\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\int\frac{(dk)}{2\omega_k}\frac{v^2(k)}{\omega_k}$$

$$+\Big(\frac{1}{-\omega_k}\Big)^2\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{(dk')}{2\omega_k'}\frac{v^2(k')}{\omega_k'}\Phi(N:\boldsymbol{k}_0^-,\boldsymbol{k}^+)\Big\}\qquad(19.19)$$

在这里,将(3–a)和(3–f);(3–d)和(3–g)組合时,得

$$\Psi^{(3)}=\frac{g^3}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}}\Big\{\Big(\frac{1}{\omega_0}\Big)\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\int\frac{(dk)v^2(k)}{2\omega_k(\omega_0-\omega_k+i\varepsilon)\omega_k}\cdot\Phi(N)$$

$$+\frac{1}{(\omega_0-(\omega_k+\omega_k')+i\varepsilon)(\omega_0-\omega_k'+i\varepsilon)\omega_0}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\cdot \frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\Phi(N:\boldsymbol{k}^{-\prime},\boldsymbol{k}^{+})$$

$$+\frac{1}{(\omega_0-(\omega_k+\omega_k')+i\varepsilon)(\omega_k+\omega_k')\omega_k}\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$\cdot \frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\Phi(N:\boldsymbol{k}^{-\prime},\boldsymbol{k}^{+})$$

$$-\left(\frac{1}{-\omega_k}\right)\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\int\frac{(dk')v^2(k')}{2\omega_k'(\omega_k+\omega_k')\omega_k'}\Phi(N:\boldsymbol{k}_0^{-},\boldsymbol{k}^{+})$$

$$+\frac{(-1)^3}{(\omega_k+\omega_k'+\omega_k'')(\omega_k+\omega_k')\omega_k}\frac{v(k'')}{\sqrt{2\omega_k''}}\frac{v(k')}{\sqrt{2\omega_k'}}$$

$$\cdot \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega_k}}\Phi(N,\boldsymbol{k}_0^{-}\boldsymbol{k}^{-\prime};\boldsymbol{k}^{+}\boldsymbol{k}^{+\prime\prime})\Big\}. \qquad (19.19')$$

(19.19′)的第二、三項(3-b, c)表示所入射的 $\boldsymbol{k}_0^-$ 在具有相当大的能量情况下，对在将 P 变成 N 的同时击出的二个介子 $\boldsymbol{k}^{-\prime}\boldsymbol{k}^{+}$ 的过程的矩陣元，作此近似时，可由

$$\bar{T}_{\rm prod}(\boldsymbol{k}^{-\prime}\boldsymbol{k}^{+}:\boldsymbol{k}_0^{-})$$
$$=\frac{g^3}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}}\left(\frac{v(\boldsymbol{k})}{\sqrt{2\omega_k}}\frac{v(\boldsymbol{k}')}{\sqrt{2\omega_k'}}\frac{v(k_0)}{\sqrt{2\omega_0}}\right)\left[\frac{1}{\omega_0(\omega_0-\omega_k')}+\frac{1}{\omega_k(\omega_k+\omega_k')}\right] \qquad (19.20)$$

得出。在探討第一、四項(3-a+f, d+g)时，与 $\Psi^{(1)}$ (19.13) 相比較，就得知是对(1-a) (1-b)乘上了

$$\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{(d\boldsymbol{k})v^2(k)}{2\omega_k^2(\omega_0-\omega_k+i\varepsilon)},\quad -\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{(d\boldsymbol{k}')v^2(k')}{2\omega_k'^2(\omega_k+\omega_k')}. \qquad (19.21)$$

这个結果，在用

$$g_r=g\left(1+\frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{(d\boldsymbol{k})}{2\omega_k^3}v^2(k)+\cdots\right) \qquad (19.22)$$

代替介子电荷(結构因子)的最初值 g 时，能被包含在大部分的 $\Psi^{(1)}$ 中。就这样，把电荷值在考虑相互作用之后而改变，如此重新修正其計算結果的解釋，我們称之为电荷重整化。

作四次微扰的計算时，就可知道代替(19.18)的 g^2，散射振幅

也同样会出現 g_r^2. 又(19.21)的积分是 ω_0, ω_k 的函数,因而仅用 g_r 来替换 g 时,就不能包含它了,因引起具有相互作用 V 的結果的 g 值是随进出介子的能量来变化的。故当能量为零时,我們把它定义为 g_r。

象这样的重整化过程我們不能一一反复进行,若用重整化了的值来写出其解答是比較好的,下章所讲的 Low 散射就是有关这方面的理論。

第6章　Low的散射理論

前章我們考察了在由核子产生介子的同时，所产生的介子又被核子吸收，以及出現的所謂自生場的反作用等几种效应，而且把含有自生場的反作用，即所謂“裹着(自生場的)衣服”的粒子的扰动，与实驗来作了比較，于是就把迁移的值与原有的值并在一起，并重新修正了这些数值的定义(重整化过程)。其結果，我們就看到了粒子的能量仅迁移了自能的部分，而其电荷的大小(相互作用常数)则是作为整体来变化的。也許有人会这样想：“如果作了重整化之后的数值是成为問題的最后一环的話，那末在計算进行一次之后就作重整化，我們能否直接作出一种只出現重整化后的数值的理論来代替此二道手續呢?”

Low和Chew在对前节处理的所謂靜止的核子模型的情况(靜止为近似)实現这个企图已得到成功。本章即将闡述这个理論。接續前节，仍选荷电介子的靜止核子的散射作为例子。

§20将論述Low等所証明的場論中計算S矩陣的整頓方法。在§21以下将把它应用到荷电介子散射問題上来以求其解答，并且进一步解释由此而得出的計算結果的物理意义。

§20　在Heisenberg表象中的散射理論

将前节所处理的Brillouin–Wigner微扰公式逐步地应用到高次，如果所得出的解的总和收敛，就可得到总Hamiltonian H_0+V的本征函数。这里我們不来求具体的解，而认为H_0+V的本征函数是存在的情况下来作形式上的討論，并将把解答的步驟放在式子上来整頓。

把一个(在坐标原点)静止时非裸的核子的 H_0+V 的本征函数,記为 $\Psi(P)$(当核子为质子时),为中子时是 $\Psi(N)$。这就是 H_0 的本征函数不存在介子态,与 $\Phi(P)$ (或 $\Phi(N)$) 比較,其不同点就在于存在着自生場的介子。但由于自生場是仅限于在坐标原点附近,故在离核子較远处作比較时,就能够說,两者(漸近的)是相同的。我們把自生場上的情况称为"非裸",而把无自生場的情况称为"裸"。又把在远处存在着动量为 $\boldsymbol{k}$ 的自由介子时 H_0+V 的本征函数記为 $\Psi(P:\boldsymbol{k}^-)$ 等等(介子的动量变量右上端附加 ± 号表示介子的电荷)。

如同在前节微扰計算中所見,在考虑 H_0+V 的本征函数,且入射动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子时,$\boldsymbol{k}$ 就附以朝不同方向散射的介子而散出,在 $\Psi(P:\boldsymbol{k}^-)$ 的一部分当中也含有这种散射波,我們把用外向球面波来表示的这种散射波記为 $\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)$ (內向球面波記为 $\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}^-)$)。

如在前章所見,除裸质子以外,具有一个自由介子 $\boldsymbol{k}^-$ 的状态 $\Phi(P:\boldsymbol{k}^-)$ 是用产生算符 $b^*(\boldsymbol{k})$ 作用于 $\Phi(P)$ 而成的,

$$\Phi(P:\boldsymbol{k}^-)=b^*(\boldsymbol{k})\Phi(P).$$

这里,若用 $\Psi(P)$ 代替 $\Phi(P)$ 时,在 $\Psi(P)$ 之中就已存在着原点附近的自生場介子,其范圍的大小不是有限的,而自由介子所存在的空間的大小可以作成任意大。在这种意义上,$\Phi(P:\boldsymbol{k}^-)$ 就与 $b(\boldsymbol{k}^*)\Psi(P)$ 漸近的相等:

$$\Phi(P:\boldsymbol{k}^-)\simeq b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P). \tag{20.1}$$

$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)$ 的漸近形除了相当于来自 $b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P)$ 的动量 $\boldsymbol{k}^-$ 的平面波之外,还含有外向散射波,因此将 $\Psi^{(+)}$ 設为

$$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)=b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P)+\chi^{(+)}. \tag{20.2}$$

它是总 Hamiltonian 的本征函数,用式子来表示,即

$$(H_0+V)\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)=\omega_k\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-). \tag{20.3}$$

在測定能量时，我們取一个非裸核子态为基准，并設为 0，以下认为前节所述之质量重整化是已經进行了的。即

$$H\Psi(P)=0. \tag{20.4}$$

这里我們仍认为（根据前节所述可知）$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)$ 对应的本征值为 ω_k.

在 (20.3) 的 $\Psi^{(+)}$ 中应用 (20.2) 时，得

$$(H-\omega_k)b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P)+(H-\omega_k)\chi^{(+)}=0, \tag{20.5}$$

将第一項的 $b^*(\boldsymbol{k})$ 移到左边，得

$$b^*H\Psi(P)+\{[H_0, b^*(\boldsymbol{k})]+[V, b^*(\boldsymbol{k})]\}\Psi(P)$$
$$-\omega_k b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P)+(H-\omega_k)\chi^{(+)}=0, \tag{20.5'}$$

根据前章的 Hamiltonian, { } 內为

$$\omega_k b^*(\boldsymbol{k})+g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}Q^*v(k),$$

考虑到 (20.4) 时，代替 (20.5′) 得出下式：

$$(\omega_k-H)\chi^{(+)}=g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}Q^*v(k)\Psi(P). \tag{20.5''}$$

在 (20.5″) 两边用 ω_k-H 形式地相除时，将得出 $\chi^{(+)}$，但这里会有 ω_k-H 等于 0 的时候。那时，$\chi^{(+)}$ 就非是外向球面波不可，故必须附加上无穷小的虚数部分，并采用以前屡次用过的方法来处理其奇异点。总之，$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)$ 可由下式給出：

$$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)=b^*(\boldsymbol{k})\Psi(P)$$
$$+\frac{1}{\omega_k-H+i\varepsilon}g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}v(k)Q^*\Psi(P). \tag{20.6}$$

对于入射的是动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子，而放出的是 $\boldsymbol{k}'$ 的介子的散射过程，由前述可知，計算 $(\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}'^-),\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-))$ 即可得出其 S 矩陣元。$\Psi^{(-)}$ 除了是在远处相当于动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的平面波以外，它还是用具有內向球面波的这种边界条件所解出的 H 的本征函数。

$$\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-) \sim (\text{平面波 } \boldsymbol{k}) + (\text{外向球面波}), \tag{20.7a}$$

$$\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}'^-) \sim (\text{平面波 } \boldsymbol{k}') + (\text{内向球面波})。 \tag{20.7b}$$

根据第1章所說明的势散射来作类推，在 (20.7a) 中計算含有(平面波 $\boldsymbol{k}'$) 的比例，就是計算用平面波 $\boldsymbol{k}$ 入射，并以相互作用 V 而散射，在 $\boldsymbol{k}'$ 方向所得到的概率振幅。但若仅是如此的話，很容易被认为用不着計算 $(\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}'^-), \Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-))$，而計算 $(b^*(\boldsymbol{k}')\Psi(P), \Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-))$ 即可。然而我們必須考虑曾一度向 $\boldsymbol{k}'$ 方向射出的平面波，在按照原样向远方傳播之前，可能会受到多次的相互作用。这便是我們使 $\Psi^{(-)}$ 出現在右边的理由。当然，仅是这样还不很充分，稍后我們将用随时間变化的非定常解方法来說明。

$$\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}'^-) = \Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}'^-) + 2\pi i \sum_n \delta(\omega_k - E_n)\Psi_n$$

$$\cdot\left(\Psi_n,\ g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}\, v(k')\, Q^* \cdot \Psi(P)\right). \tag{20.8}$$

把 (20.6) 的 $i\varepsilon$ 用 $-i\varepsilon$ 来替换，并給出 $\Psi^{(-)}$，就可直接推得上式。Ψ_n 是滿足外向边界条件的 H 的全部本征函数，应用(20.8)即得

$$S(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-) = (\Psi^{(-)}(P:\boldsymbol{k}'^-), \Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-))$$

$$= \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') + 2\pi i \sum_n \delta(\omega_k - E_n)$$

$$\cdot\left(\Psi(P)\, Q v(k')\, g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}\,\Psi_n\right)(\Psi_n \Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)). \tag{20.9}$$

其中$\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$是从$(\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}'^-)\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-))$得出的(遵从同一边界条件的 H 的本征函数組成正交完备系)。这就是不引起散射而路过的部分，因此，若是真正处理散射，只需計算与 (20.9) 中第二項的 $2\pi i\delta$ ( ) 成比例的部分即可。而从其絕对值的平方就可导得散射截面，这是早已知道的。最后，下面的問題就归結为关于矩陣元

$$\left(\Psi(P)Qv(k')g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}\cdot\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)\right)\equiv R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-) \tag{20.10}$$

的計算。应用 (20.6) 式得

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=&g^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')\\&\cdot\left(\Psi(P)Q\frac{1}{\omega_k-H+i\varepsilon}Q^*\Psi(P)\right)\\&+g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}v(k')\left(\Psi(P)b^*(\boldsymbol{k})Q\Psi(P)\right).\end{aligned} \tag{20.11}$$

在此，計算 $b(\boldsymbol{k})\Psi(P)$ 时，有

$$\begin{aligned}(H_0+V)b(\boldsymbol{k})\Psi(P)=&b(\boldsymbol{k})(H_0+V)\Psi(P)\\&-\omega_k b(\boldsymbol{k})\Psi(p)-g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}v(k)Q\Psi(P).\end{aligned} \tag{20.12}$$

若考虑到 $(H_0+V)\Psi(P)=0$，即得

$$b(k)\Psi(P)=\frac{-1}{H+\omega_k}g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}v(k)Q\Psi(P). \tag{20.13}$$

在这里可不必顾虑分母为 0 的情况，所以可直接做形式的除法。將 (20.13) 代入 (20.11) 中，就得到

$$\begin{aligned}R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=&g^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')\\&\cdot\left\{\left(\Psi(P)Q\frac{1}{\omega_k-H+i\varepsilon}Q^*\Psi(P)\right)\right.\\&\left.+\left(\Psi(P)Q^*\frac{1}{-\omega_k-H}Q\Psi(P)\right)\right\}.\end{aligned} \tag{20.14}$$

再用正交系 Ψ_n 来展开，且令 $H\Psi_n=E_n\Psi_n$，則

$$-R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=g^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')\sum_n\left\{(\Psi(P)Q\Psi_n)\right.$$

$$\cdot\frac{1}{E_n-\omega_k-i\varepsilon}(\Psi_n Q^* \Psi(P))$$

$$+(\Psi(P)Q^*\Psi_n)\frac{1}{E_n+\omega_k}(\Psi_n Q\Psi(P))\Big\}. \tag{20.15}$$

这与前节所述的二次微扰公式具有非常相似的形式。我們取 $\Psi(N)$ 作为 Ψ_n 时，則 $E_n=0$，因子 $g^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')\frac{1}{\omega_k}$ 是完全一致的，而只是算符的矩陣元象 $(\Psi(N)Q^*\Psi(P))\cdot(\Psi(P)Q\Psi(N))$ 一样，其不同点在于非裸核子的本征函数中挾有运算子。由 (20.15) 的右边可見 { } 內的第一項和第二項都具有某种对称性。也就是說矩陣元互相 Hermite 共軛，把第一項的本征値的参数 ω_k 改成 $-\omega_k$，則就在第二項中出現。这种对称性称为交叉对称。就实际而論，在我們的例題中，这种对称性并不是全部都表面化了的，这是因为，譬如說从 $(\Psi(N)Q\Psi(P))=0$ 可知 (20.15) 的第二項关于和 n 的最初項也为 0. 而这并非是多余的。在一般的場合，例如除荷电介子以外，当中性介子也有相互作用时，給出了 (20.15) 的第二項就并不得 0. 至今我們在所考慮的負介子和质子的相互作用上，首先认为入射介子被质子吸收，而过渡到中間态，再进一步在与入射介子不同的方向放出負介子而引起散射。但是在正介子向着质子入射时，第一步是质子将正介子向着与入射介子不同的方向放出，其次便是中間态的中子被入射介子吸收而散射：此时，代替 (20.15) 的 $\Psi(P)$ 而得出 $\Psi(N)$ 的相应式子，其中只有相当于 (20.15) 的第二項的不是 0，而如第一項型的項是 0. 若在入射介子时，相当于 (20.15) 的第一項型，第二項型的項均不为 0. 象这样来考察散射时，从某种意义上說来，我們必須同等地来考慮究竟是先发生入射介子的吸收呢，还是先放出散射介子。这就是交叉对称。关于这方面，到 §22 再来論述。

§21 一介子近似

現在来考虑求前节中 (20.15) 式的解。在微扰論中是取裸核子态作为基准的，但在逐級高次的微扰計算中，我們曾研究过"裹衣"的影响，(20.15) 只是表現出非裸的态函数。这具有下列优点。試考虑作为 Ψ_n 而出現 $\Psi(N)$ 的情况。此时，考察矩陣元

$$(\Psi(N)Q^*\Psi(P)),$$

就可得出較簡单的重整化的解答。关于这一点，象下面那样做就可明白。即設想在相互作用中除量子化的介子以外，附加上(下式中的 $e(k)$ 是給定的常数)

$$\phi_{\pm}^{ex}(\boldsymbol{x})=\int[e_{\pm}(k)e^{ikx}+e_{\pm}^*(k)e^{-ikx}]\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}\frac{dk}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (21.1)$$

作为外場的情况，也就是設 $\phi_{\pm}(\boldsymbol{x})\to\phi_{\pm}(\boldsymbol{x})+\phi_{\pm}^{ex}(\boldsymbol{x})$ 时 ($\pm$ 表电荷)，我們就可知道与外場的非裸核子的相互作用的矩陣元为

$$g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k}}v(k)(\Psi(N)Q^*\Psi(P))(e_-^*(\boldsymbol{k})\text{ 或 }e_+^*(\boldsymbol{k})).$$

$\Psi(N)$，$\Psi(P)$ 是裸核子态 $\phi(N)$，$\phi(P)$ 場合时 $(\phi(N)Q^*\phi(P))=1$ 的矩陣元的这件事，从前章所得到的矩陣表示中就可得知。对此，介乎非裸核子态当中的情况，在結果上可知其相互作用常数的大小是不同的。作为整个来看，相互作用常数 g 就变成为重整化后的值 g_r，故作下列安插时，便可立即得到重整化后之解答。

$$g(\Psi(N)Q^*\Psi(P))=g_r(\phi(N)Q^*\phi(P))=g_r. \quad (21.2)$$

在 (20.15) 中的 Ψ_n 上，除 $\Psi(N)$ 之外，也会出現 $\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}''^-)$，$\Psi^{(+)}(N:\boldsymbol{k}'''^-,\boldsymbol{k}^{iv+})$ 等。另一方面，不仅对于 $\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^-)$，且对 $\Psi^{(+)}(N:\boldsymbol{k}^-,\boldsymbol{k}'^+)$ 等也作前节所做的計算，則

除 $R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=g\left(\Psi(P)\cdot Qv(k')\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}\Psi^{(+)}(P,\boldsymbol{k}^-)\right)$ 之外，还能得出相当于 (20.15) 的关于 $g\left(\Psi(P)Qv(k')\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}\Psi^{(+)}(N:\boldsymbol{k}^-,\boldsymbol{k}^{+\prime})\right)$ 等的式子，把以上这些全部联立起来求解，所得的无穷多个联立方程的全部内容是与原来場論中的方程完全等同的。

当然，我們很希望能够求出这种場論方程的准确的解，但在現在还不能实現这一点。于是試作 (20.15) 中 Ψ_n 的 $\Psi^{(+)}(N:\boldsymbol{k}^-\boldsymbol{k}'^+)$ 以下全部省略的近似。这种近似称为一个介子近似：因为在 Ψ_n 上只取到一个介子态 $\Psi^{(+)}(P,\boldsymbol{k}^-)$ 为止之故。这种近似比微扰論优越之处在于它取用了經多次反复散射而形成末态的过程。

为方便起見，在只作到一介子近似就停止时，(20.15) 本身就成为封閉形式。也就是說，把 (21.2) 与 (20.10) 都考虑在內，若 (20.15) 不为束縛态时，就成为

$$R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=g_r^2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')\frac{1}{-\omega_k}$$
$$+\int\frac{(dk'')}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{1}{\omega_{k''}-\omega_k-i\varepsilon}R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}''^-)R^*(\boldsymbol{k}^-:\boldsymbol{k}''^-)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\omega_{k''}+\omega_k}R(\boldsymbol{k}'^+:\boldsymbol{k}''^+)R^*(\boldsymbol{k}^+:\boldsymbol{k}''^+)\right\}. \qquad (21.3)$$

而 $R(\boldsymbol{k}'^+:\boldsymbol{k}^+)=\left(\Psi(P)Q^*v(k')g\sqrt{\frac{1}{2\omega_k'}}\Psi^{(+)}(P:\boldsymbol{k}^+)\right)$ 是正介子向质子入射时的散射振幅。

这里，使我們联想起核子通常是靜止的，以及核子的介子电荷的空間分布为球对称的情况。这时介子和核子的相互作用是球对称地发生的。从而被散射的介子也只是 S 波。$R(\boldsymbol{k}':\boldsymbol{k})$ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{k}'$ 之間夾角的函数，而其中的 S 波部分，即实际上仅表为与角度无关的部分。为計算方便，我們設

$$R(\boldsymbol{k}'^-:\boldsymbol{k}^-)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')f^{(1)}_{(\omega_k)}, \tag{21.4}$$

$$R(\boldsymbol{k}'^+:\boldsymbol{k}^+)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\omega_k\omega_k'}}v(k)v(k')f^{(0)}_{(\omega_k)},$$

把 (21.4) 代入 (21.3)，得

$$f^{(1)}_{(\omega_k)}=-\frac{g_r^2}{\omega_k}+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega_k' k' v(k')^2\left[\frac{|f^{(1)}_{(\omega_{k'})}|^2}{\omega_{k'}-\omega_k-i\varepsilon}+\frac{|f^{(0)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}+\omega_k}\right]. \tag{21.5}$$

这里，为了只求出 S 波部分，故把积分部分的因子稍加改变了。

完全同样地对于 $f^{(0)}_{(\omega_k)}$，可得

$$f^{(0)}_{(\omega_k)}=\frac{g_r^2}{\omega_k}+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega_{k'} k' v(k')^2\left[\frac{|f^{(0)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}-\omega_k-i\varepsilon}+\frac{|f^{(1)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}+\omega_k}\right]. \tag{21.6}$$

初看起来，(21.5) 与 (21.6) 有些奇妙之处。譬如 (21.5) 是处理負介子由于质子而生的散射，故介子不論何时都是先被质子吸收然后再放出，这是反复多少次也不会改变的。$f^{(1)}$ 是先放出而后被吸收的过程（这是由于正介子、质子而引起的散射）的振幅，而 $f^{(0)}$ 在积分中的最后一項上才出現，不过，在 (20.15) 的第二項中是含有自生場的反作用效应的，所以現在这种情况由下面的討論可知，是由于改变了結构因子强度的結果所引起。設由

$$G(\omega_k)=g_r^2+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega_{k'} k' v(k')^2\frac{1}{\omega_{k'}+\omega_k}\left[|f^{(1)}_{(\omega_k)}|^2-|f^{(0)}_{(\omega_k)}|^2\right] \tag{21.7}$$

来定义 $G(\omega_k)$ 的值时，(21.5)，(21.6) 可改写如下：

$$f^{(1)}_{(\omega_k)}=-\frac{G(\omega_k)}{\omega_k}+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega_{k'} k' v(k')^2\left[\frac{|f^{(1)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}-\omega_k-i\varepsilon}+\frac{|f^{(1)}_{(\omega_{k'})}|^2}{\omega_{k'}+\omega_k}\right], \tag{21.5'}$$

$$f^{(0)}_{(\omega_k)}=\frac{G(\omega_k)}{\omega_k}+\frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\infty}d\omega_{k'}k'v(k')^2\left[\frac{|f^{(0)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}-\omega_k-i\varepsilon}+\frac{|f^{(0)}_{(\omega_k)}|^2}{\omega_{k'}+\omega_k}\right],\tag{21.6'}$$

这样改写以后，如考虑 $G(\omega_k)$ 是已知的，就可知道 (π^-－P) 散射和 (π^+－P) 散射都能各自独立地确定。这样一来，所有自生場的反作用都可以用結构因子变化的形式来表現这件事，在我們所处理的問題中，只要考虑到我們把核子都假設为静止的，并确定相互作用强度的参数必为相互作用常数，那就是很自然的了。

在 $g_r^2<1$ 情况下，如下所述，可求出正确的解，并能正确計算出 $G(\omega_k)$。

$$\frac{G(\omega)}{g_r^2}=\frac{1}{2}+\frac{\omega\omega_0^2}{\pi}\left[\frac{2(\omega^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\omega(\omega^2-\omega_0^2)}\tan^{-1}\sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}+\frac{2\omega}{\omega-\omega_0}\frac{\sqrt{1-\omega_0^2}}{\omega_0^2}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\omega_0}{1+\omega_0}}\right],\quad \omega_0=\frac{2g_r^2}{1+g_r^2}.\tag{21.8}$$

(21.8) 右边当 $\omega=0$ 时为1，且由此往下逐漸減小，但在例如 $g_r^2=0.13=\frac{4}{30}$ 及 $\omega=\infty$ 时，減小到7% 为止而不能再超过。

最后論述一下 (21.5) 或 (21.6) 的解。在轉回到 (21.5), (21.6) 之前，由 (20.15) 可知，$f^{(1)}$ 与 $f^{(0)}$ 具有下列的对称性质：

$$-f^{(1)}(-z)=f^{(0)}(z),\quad -f^{(0)}(-z)=f^{(1)}(z).\tag{21.9}$$

又，$f^{(0)}$, $f^{(1)}$ 具有性质：

$$f(z^*)=f(z)^*.\tag{21.10}$$

再用周相移来写出时，就成为

$$f^{(\alpha)}(\omega)=\frac{e^{i\delta_\alpha(\omega)}\sin\delta_\alpha(\omega)}{kv(k)^2},\ \omega=\sqrt{\mu^2+k^2},\ \alpha=0.1.\tag{21.11}$$

由此可見，$\mathrm{Im}\,f(z)>0$, $\mathrm{Im}\,z>0$. 这 $\mathrm{Im}\,z>0$ 即說明从实軸上方趋近于实軸时的极限值即在实际上所应用的 $f^{(\alpha)}(\omega)$。由 (21.10)，若 $\mathrm{Im}\,z<0$，則 $\mathrm{Im}\,f(z)<0$. 当然，在横截实軸上，$\mathrm{Re}\,f(z)$ 是連續变化的。由此可見，在实軸上 $\mu\to+\infty$, $-\mu\to-\infty$ 的区間中是連續地分布着奇异点的，故在此必須把复数 z 平面的

切口列入在内。象这种有关函数論方面的性质,是由把具体的 $f(z)$ 的形式从已知的 (21.5) 或 (21.6) 上导出来的，而这些事实对于在求前面势散射等例题中的散射振幅时也是成立的。[如果我們假定这种性质被满足,反过来写成

$$f(z)=\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\alpha(z')}{z'-z}+\int_{-\infty}^{-\mu}\frac{d\beta(z')}{z'+z}+P(z)$$

的形式，在数学上是能够証明的。而 $\alpha(z)\beta(z)$ 是单調增大，且为正的函数。$P(z)$ 是在切口以外之处具有一級极点的函数。此种函数也称为 R 函数。]

求解 (21.6) 是有好几种方法的。譬如，将 $f(\omega)$ 的实部虛部各自用 g_r^2 的冪展开,用比較两边相同冪次的方法,即把

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Re}\,f^{(0)}(\omega_k)&=g_r^2A^{(1)}(\omega_k)+g_r^4A^{(2)}(\omega_k)+\cdots,\\ \mathrm{Im}\,f^{(0)}(\omega_k)&=+g_r^4B^{(2)}(\omega_k)+\cdots\end{aligned}\right\}\tag{21.12}$$

两边作比較,由 (21.11) 可知,

$$\mathrm{Im}\,f^{(0)}(\omega_k)=kv^2(k^2)\,|f^{(0)}(\omega_k)|^2\tag{21.13}$$

成立。于是从

$$A^{(1)}(\omega_k)=+\frac{1}{\omega_k}\tag{21.14}$$

出发作 g_r^4 的項的虛数部分，并用于 (21.6) 的被积項中来求 g_r^4 的項的实数部分。这样反复操作便可。为使这种近似法更具有意义，必須确定用 g_r^2 展开的級数是收斂的。即使在令 $v(k)=1$ 时，其解仍为有限,故下面就設 $v(k)=1$。

利用函数論中的理論，就可求出我們例題的解答。为此考慮下面的积分

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C dz'\,[z'^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}}\,\frac{F(z')}{z'-z},\tag{21.15}$$

取积分路綫 C 如图 21.1 所示。当适当定义幅角时，$[z^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}}$ 就成为

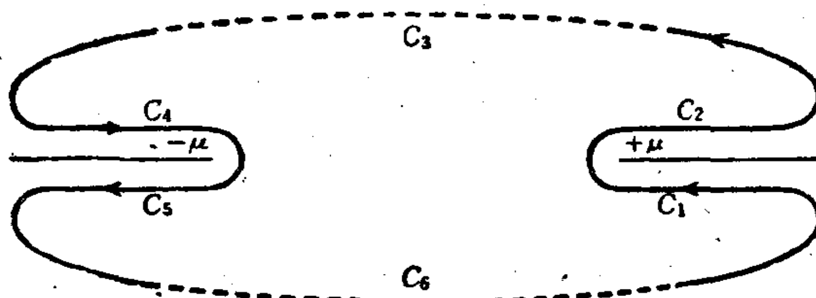


图 21.1

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } C_1 \text{ 上是 } -ik,\ \text{在 } C_2 \text{ 上是 } +ik, \\ \text{在 } C_4 \text{ 上是 } -ik,\ \text{在 } C_5 \text{ 上是 } +ik,\end{array}\right\}$$

$F(z)$ 在 $z=z_1, z_2, \cdots$ 上具有一級极点，若設其留数为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$，則当这些极点在切口外时，当然就有

$$g(z)=[z^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}}F(z)+\sum_n \frac{[z_n^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}}}{z_n-z}\alpha_n. \qquad (21.16)$$

另一方面，$F(z)$ 当 $|z|\to\infty$ 时，如果至少要小到 $|z|^{-2}$ 的程度的話，就可以将 C_3, C_6 所給出的忽略掉，因而得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_C dz'[z'^2-\mu^2]^{\frac{1}{2}}\frac{F(z')}{z'-z}\\&=\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega' k'\frac{F(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty(-d\omega')k'\frac{F(-\omega')}{-\omega'-\omega}\\&=\frac{1}{\pi}\int_\mu^\infty d\omega' k'\left[\frac{F(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{F(-\omega')}{\omega'+\omega}\right],\end{aligned} \qquad (21.17)$$

从而对 $\omega>0$，选

$$F(\omega)=|f^{(0)}(\omega)|^2,\ F(-\omega)=|f^{(1)}(\omega)|^2, \qquad (21.18)$$

則 (21.17) 的右边就成为 (21.6) 中积分的实数部分。于是在 (21.18) 成立时，

$$\mathrm{Re}\, f^{(0)}(\omega)-\frac{g_r^2}{\omega}=\sum_n\frac{(z_n^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{z_n-\omega}\alpha_n+(\omega^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}F(\omega), \qquad (21.19)$$

$(\omega^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ 是在复数平面上从上方接近正实軸时的 ik。与此相

反，若 z_n 在实数值上满足 $-\mu<z_n<\mu$，则 $(z_n^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ 就可用 $-\sqrt{\mu^2-z_n^2}$ 来表示。注意到这些，就得

$$f^{(0)}(\omega)=\frac{g_r^2}{\omega}+\sum_n\frac{(z_n^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{z_n-\omega}\alpha_n+(\omega^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}F(\omega). \quad (21.19')$$

这是因为当 (21.18) 成立时，就有

$$\operatorname{Im}f^{(0)}(\omega)=k|f^{(0)}(\omega)|^2=kF(\omega). \quad (21.20)$$

现在假定 $F(\omega)$ 是代数函数，并具有二个极点 $z_1=0, z_2=\omega_0$，这样就可将解答求出来。

假設

$$F(\omega)=\frac{C}{\omega}+\frac{C}{\omega_0-\omega}=\frac{C\omega_0}{\omega(\omega_0-\omega)}. \quad (21.21)$$

这是以 $|\omega|\to\infty$ 时，按 ω^{-2} 的阶变小为条件的。由 (21.19') 可得出

$$\operatorname{Re}f^{(0)}(\omega)=\frac{g_r^2}{\omega}+\frac{C\mu}{\omega}+\frac{\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}}{\omega_0-\omega}C,$$

$$\operatorname{Im}f^{(0)}(\omega)=kF(\omega)=\frac{kC\omega_0}{\omega(\omega_0-\omega)}, \quad (21.22)$$

这必须满足 (21.18)，即得

$$\frac{(g_r^2+C\mu)^2}{\omega^2}+2\frac{(g_r^2+C\mu)\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}C}{\omega(\omega_0-\omega)}$$
$$+\frac{\mu^2-\omega_0^2}{(\omega_0-\omega)^2}C^2+\frac{C^2(\omega^2-\mu^2)}{\omega^2}+2\frac{C^2(\omega^2-\mu^2)}{\omega(\omega_0-\omega)}$$
$$+\frac{C^2}{(\omega_0-\omega)^2}(\omega^2-\mu^2)=\frac{C\omega_0}{\omega(\omega_0-\omega)}, \quad (21.23)$$

整理后得

$$\frac{g_r^2(g_r^2-2C\mu)}{\omega^2}+2\frac{C\{-C\mu^2-(g_r^2-C\mu)\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}\}}{\omega(\omega_0-\omega)}$$
$$=\frac{C\omega_0}{\omega(\omega_0-\omega)}. \quad (21.23')$$

故

$$C=-\frac{g_r^2}{2\mu}, \tag{21.24}$$

$$(g_r^2+C\mu)\sqrt{\mu^2-\omega_0^2}-C\mu^2=\frac{\omega_0}{2}, \tag{21.25}$$

即

$$\omega_0=\frac{2g_r^2}{1+g_r^4}\mu. \tag{21.25'}$$

同理可解得 $f_+^{(1)}(\omega)$，并能确定 (21.18) 亦成立。由 (21.25′) 可见，$g_r^2=1$ 时，$\omega_0=\mu$。这与到目前为止我們所考虑的条件 $\omega_0^2<\mu^2$ 不合。此时，$\omega=\mu$ 会发生共振。对于 $k=0$ 起共振現象，如同早在第1章勢散射中所見，相当于其束縛态在开始时就发生，从而，在 $g_r^2>1$ 时，返回到前节的 (20.15)，在对 n 求和时，必須把由此束縛态所导出的項列入后再来改解。

以上是关于作一介子近似的討論，現在再返回到 (20.15) 来看看。将二个介子以上的振幅也列入，并把其解答用 g_r^2 的冪次来展开时，也能証明它剛好与前章所处理的微扰論的解中用重整化所作的相一致。

§22 交叉对称

我們曾經把 §20 中 Low 和 Chew 所导出的式子 (20.15) 又用考察定常解的方法导出过。这里，再把相同的問題重提一下，但只是将 (20.15) 从非定常解的考察中来导出；这也許是有助于理解的。

我們現在取 Heisenberg 表象。将話說得一般些，就是說，介子的种类有 n 个，并設介子場的 Hamiltonian 为

$$H_0=\sum_{\alpha=1}^{n}\int(dk)\,a_\alpha^*(\boldsymbol{k})\,a_\alpha(\boldsymbol{k})\,\omega_k, \tag{22.1}$$

与核子的相互作用可由

$$V=\sum_{\alpha=1}^{n}\int(dk)\left[V_{\alpha}^{\dagger}(\boldsymbol{k})a_{\alpha}^{*}(\boldsymbol{k})+V_{\alpha}(\boldsymbol{k})a_{\alpha}(\boldsymbol{k})\right] \tag{22.2}$$

給出。这里假設把直到前节为止不断涉及到的 Q 及結构因子 g, $v(k)$ 等全部归集在一起并入 $V_{\alpha}(k)$ 之中的。

在前面已經計算过 S 矩陣的矩陣元，而在 Heisenberg 表象上 S 矩陣的算符就可从

$$S=\lim_{\substack{t_f\to+\infty\\ t_i\to-\infty}}e^{-iH(t_f-t_i)} \tag{22.3}$$

給出。这在第 3 章虽已論述过，但若将 (22.3) 改写为如下形式时，計算起来将更加方便。

$$S(t_f:t_i)=e^{-iH(t_f-t_i)}=e^{-iH_0t_f}U(t_f:t_i)e^{+iH_0t_i}, \tag{22.3'}$$

$$\begin{aligned}U(t_f:t_i)&=P\int_{t_i}^{t_f}d\tau\exp(-iV(\tau))\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_i}^{t_f}d\tau_1\int_{t_i}^{\tau_1}d\tau_2\cdots\int_{t_i}^{\tau_{n-1}}d\tau_nV(\tau_1)V(\tau_2)\cdots V(\tau_n),\end{aligned} \tag{22.4}$$

这里，

$$\begin{aligned}V(\tau)&=e^{iH_0\tau}Ve^{-iH_0\tau}\\&=\sum_{\alpha=1}^{n}\int(dk)\left[V_{\alpha}^{+}(\boldsymbol{k})a_{\alpha}^{*}(\boldsymbol{k})e^{i\omega_k\tau}+V_{\alpha}(\boldsymbol{k})a_{\alpha}(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_k\tau}\right]\end{aligned} \tag{22.5}$$

是相互作用表象的相互作用 Hamilton 函数。(22.4) 中第二式的記号 P 意味着按第三式的意义来展开指数函数时，应把 τ 的值按較小顺序自右向左排列。与此相应，τ 的积分范圍也由同样顺序所界定。于是将 (22.3′) 用介于末态与初态之間的波函数来作内积时，就可得出所求的矩陣元。如果考虑入射为 α 类，动量为 $\boldsymbol{k}$ 的介子，散射出去为 β 类，动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的介子的情况，则初态、末态分别为

$$\begin{aligned}\Phi(:\boldsymbol{k}_{\alpha})&=a_{\alpha}^{*}(k)\Phi(\ ),\\\Phi(:\boldsymbol{k}'_{\beta})&=a_{\beta}^{*}(\boldsymbol{k}')\Phi(\ ).\end{aligned} \tag{22.6}$$

这里，把核子的状态，即中子、质子的区别等作适当的考虑，并把不存在介子的裸核子波函数用 $\Phi(\ )$ 表示。$\Phi(:\boldsymbol{k}_\alpha)\Phi(:\boldsymbol{k}'_\beta)$，$\Phi(\ )$ 都是 H_0 的本征函数。从而，将所要求的 S 矩陣元記为 $S(\boldsymbol{k}'_\beta:\boldsymbol{k}_\alpha)$ 时，就有

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta:\boldsymbol{k}_\alpha)=\lim_{\substack{t_f\to\infty\\ t_i\to-\infty}}\Big(\Phi(\ )a_\beta(\boldsymbol{k}')e^{-iH_0t_f}P\int_{t_i}^{t_f}d\tau\cdot$$

$$\cdot\exp(-iV(\tau))e^{iH_0t_i}a^*_\alpha(\boldsymbol{k})\Phi(\ )\Big),\qquad(22.7)$$

这里 $\Phi(\ )$ 对介子来說是真空态，故有

$$a_\beta(\boldsymbol{k}')\Phi(\ )=0.$$

若把 (22.7) 式右边括号内左端的 $a_\beta(k')$ 移于括号内的右端，則

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta:\boldsymbol{k}_\alpha)=\lim_{\substack{t_f\to\infty\\ t_i\to-\infty}}\Big(\Phi(\ )e^{-iH_0t_f}e^{-i\omega't_f}\cdot$$

$$\cdot\Big[a_\beta(k'),\ P\int_{t_i}^{t_f}d\tau\exp(-iV(\tau))a^*_\alpha(k)\Big]e^{i\omega t_i}e^{iH_0t_i}\Phi(\ )\Big)$$

$$=\lim_{\substack{t_f\to\infty\\ t_i\to-\infty}}\Big(\Phi(\ )e^{-i(H_0+\omega')t_f}\int_{t_i}^{t_f}dtP\cdot\int_t^{t_f}d\tau\exp(-iV(\tau))\cdot$$

$$\cdot V^+_\beta(k')e^{i\omega't}P\cdot\int_{t_i}^{t}d\tau'\exp(-iV(\tau'))$$

$$\cdot a^*_\alpha(k)e^{i(\omega+H_0)t_i}\Phi(\ )\Big)+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\qquad(22.7')$$

这里，最后的 δ 函数是由 $a_\beta(\boldsymbol{k})$ 与 $a^*_\alpha(\boldsymbol{k})$ 的对易运算引出的。其次，将 (22.7′) 的括号内右側的 $a^*_\alpha(k)$ 移于左側时，$(\Phi(\ )a^*_\alpha(k)\cdots)=0$。因此，作相同的处理，可得

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta:\boldsymbol{k}_\alpha)=\lim_{\substack{t_f\to\infty\\ t_i\to-\infty}}\Big\{\Big(\Phi(\ )e^{-i(H_0+\omega')t_f}\int_{t_i}^{t_f}dt\int_{t_i}^{t}dt'$$

$$\cdot P\cdot\int_t^{t_f}d\tau\exp(-iV(t))V^+_\beta(k')e^{i\omega't}$$

$$\cdot P\cdot\int_{t'}^{t}d\tau'\exp(-iV(\tau'))V_\alpha(k)e^{-i\omega t'}$$

$$\cdot P\cdot\int_{t_i}^{t'}d\tau''\exp(-iV(\tau''))\cdot e^{i(\omega+H_0)t_i}\Phi(\ )\Big)$$

$$+\Big(\Phi(\ )e^{-i(H_0+\omega')t_f}\int_{t_i}^{t_f}dt'\int_{t_i}^{t'}dt$$

$$\cdot P\cdot\int_{t'}^{t_f}d\tau\exp(-iV(\tau))V_\alpha(k)e^{-i\omega t'}$$

$$\cdot P\cdot\int_{t}^{t'}d\tau'\exp(-iV(\tau'))\cdot V_\beta^+(k')e^{i\omega' t}$$

$$\cdot P\cdot\int_{t_i}^{t}d\tau''\exp(-iV(\tau''))e^{i(\omega+H_0)t_i}\Phi(\ )\Big)\Big\}$$

$$+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')。\tag{22.7''}$$

此后，由于 $e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega' t_f}$ 等的周相因子与散射截面无关，故把它舍去。应用 (22.3′) 公式的逆，得

$$P\cdot\int_{t_2}^{t_1}d\tau\exp(-iV(\tau))=e^{iH_0t_1}e^{-iHt_1}e^{iHt_2}e^{-iH_0t_2}.$$

利用此式将 (22.7″) 改写，得

$$S(\boldsymbol{k}_\beta':\boldsymbol{k}_\alpha)=\lim_{\substack{t_f\to\infty\\ t_i\to-\infty}}\Big\{\Big(\Phi(\ )e^{-iHt_f}\cdot\int_{t_i}^{t_f}dt\int_{t_i}^{t}dt'$$

$$\cdot(e^{iHt}V_\beta^+(k')e^{i\omega' t}e^{-iHt}e^{iHt'}V_\alpha(k)e^{-i\omega t'}e^{-iHt'})e^{iHt_i}\Phi(\ )\Big)$$

$$\cdot\Big(\Phi(\ )e^{-iHt_f}\int_{t_i}^{t_f}dt'\cdot\int_{t_i}^{t'}dt(e^{iHt'}V_\alpha(k)e^{-i\omega t'}e^{-iHt'}e^{iHt}$$

$$\cdot V_\beta^+(k')e^{i\omega' t}e^{-iHt})e^{iHt_i}\Phi(\ )\Big)+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\tag{22.8}$$

这也可写成下式

$$S(\boldsymbol{k}_\beta':\boldsymbol{k}_\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}dt'e^{i\omega' t}e^{-i\omega t'}(\Psi(\ )P[\boldsymbol{V}_\beta^+(k':t)\boldsymbol{V}_\alpha(k:t')]$$

$$\cdot\Psi(\ ))+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').\tag{22.9}$$

其中 P 表示下列意义：若 $t>t'$，则将 $V_\beta^+(t)$ 排列在左边，若 $t'>t$，就排列到右边，同时表示积分范圍也由此而相应地界定：其內容与(22.8)右边的第一及第二括号內相同，只是用記号 P 使之簡化而

已。大写的 $\boldsymbol{V}$ 表示 Heisenberg 表象上的 $\boldsymbol{V}$.

$$\boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k}:t)=e^{iHt}V_\alpha(k)e^{-iHt}=e^{iHt}[V,\ a_\alpha^*(k)]e^{-iHt}. \qquad (22.10)$$

运用这种記号来表述散射理論，在場論中是被广泛应用着的。又在这里，当时間較久时，H_0 的本征函数就会轉变成为总 Hamiltonian $H=H_0+V$ 的本征函数，且会避免在 $t_f=+\infty$ 或 $t_i=-\infty$ 时产生 $e^{\pm i\infty}$ 其条件用式子写出时，就是如下的置換

$$\lim_{t_i\to-\infty} e^{-iH(t-t_i)}\Phi(\ )\to e^{-iHt}\Psi(\ ). \qquad (22.11)$$

此处 $\Psi(\ )$ 表示总 Hamiltonian H 的本征态，且意味着不存在自由介子的情况。

返回到 (22.8)，考虑 (22.11) 来作积分时，得

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta\boldsymbol{k}_\alpha)=2\pi\delta(\omega-\omega')\left\{\left(\Psi(\ )V_\beta^+(k')\frac{1}{E_0+\omega-H+i\varepsilon}V_\alpha(k)\Psi(\ )\right)\right.$$
$$\left.+\left(\Psi(\ )V_\alpha(k)\frac{1}{E_0-\omega'-H+i\varepsilon}V_\beta^+(k')\Psi(\ )\right)\right\}.$$
$$(22.12)$$

这里 E_0 是 $\Psi(\ )$ 的本征值，故有

$$H\Psi(\ )=E_0\Psi(\ ).$$

在 §21 中，在重整化之后是令 $E_0=0$ 的。(22.12) 是和原先用定常解所求出的 (20.14) 完全相同的。总結以上的計算，作为散射的第一阶段，交叉对称是根据入射介子先被吸收还是先放出散射介子这两种过程之間的对称性质而归納出来的。

第7章 色散关系

到前一章为止我們所处理的問題，都是已知体系的 Hamiltonian, 求解 Schrödinger 方程来决定体系的状态。但是，体系的內在性质将对体系的状态要求具备一定的条件，例如，波束在碰撞后才开始出現散射波，故在碰撞前不出現散射波就是其条件。如果充分利用这种条件，卽使不解出方程，也可导出所要測定的量之間的关系，而这种关系在任何时候又都是必定成立的。本章就是从物理現象必然滿足因果規律出发，导出散射振幅与截面之間被称为色散公式的重要关系。

§23 Kramers-Kronig 的色散公式

为了了解从因果律导出这一关系式的概况，取光波与粒子相碰撞而散射的情形作为例子，并以古典的理論来处理。我們知道，若令散射波振幅为 $f_{sc}(t)$，它就是 t 的一个較复杂的函数，而若散射滿足因果律，就具有下列的性质。所謂因果律，一般就是說，先有原因，后必有結果。因此对現在这种情况就可以这样說：入射波不碰上粒子时，就不出現散射波。这里若选波束的波陣面到达粒子的位置时間为 $t=0$，则

$$f_{sc}(t)=0, \quad t<0. \tag{23.1}$$

这就是散射振幅必須滿足的条件。

将此散射振幅作 Fourier 分解，可得出单一頻率的光的散射振幅 $f(\omega)$：

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f_{sc}(t)\,dt. \tag{23.2}$$

f_{sc} 是实数，故

$$f(-\omega)=f^*(\omega). \tag{23.3}$$

也就是說，因为有 (23.1) 的条件，所以 (23.2) 的积分限取 0 到 ∞ 便可。即

$$f(\omega)=\int_0^\infty e^{i\omega t}f_{sc}(t)dt. \tag{23.4}$$

上式中 $f(\omega)$ 是对实数的 ω 定义的，故可将它延拓到 ω 复平面的上半平面

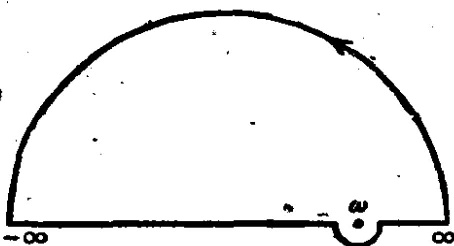


图　23.1

$$\omega=x+iy,\quad y\geqslant 0. \tag{23.5}$$

这是因为 $e^{-\nu t}$ 起衰减的作用，所以 $f(\omega)$ 若存在，(23.4) 的积分对 (23.5) 的 ω 必收斂[1]。于是 $f(\omega)$ 为定义在上半平面上的 ω 的解析函数。若取图示的积分路綫，并使用 Cauchy 积分定理，得

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega', \tag{23.6}$$

又由 (23.4) 可知，$f(\omega)$ 是由 $e^{i\omega t}$, $t>0$, 得出，故当 $f(\pm\infty)=0$ 时，沿大半圓之积分值为 0。从而应用

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega')}{\omega'-\omega-i\varepsilon}d\omega'$$

或

$$\frac{1}{\omega'-\omega-i\varepsilon}=P\frac{1}{\omega'-\omega}+i\pi\delta(\omega'-\omega)$$

的关系，就得

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'.$$

取出上式的实数部分，則得

---

[1] 为使这种說法成立，$f_{sc}(t)$ 就必須滿足适当的条件，于是我們所要考虑的对象总认为是具有这种条件的函数。

$$\operatorname{Re} f(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'. \tag{23.7}$$

（以下只有当含意不明确时，才使用主值积分記号 P.）

为了导出 (23.7)，我們曾設 $f(\omega)$ 在 $\pm\infty$ 时为 0，但可将条件略微放寬。也就是說，用函数 $\frac{f(\omega)}{\omega-\omega_0+i\varepsilon}$ 代替 $f(\omega)$，并作完全相同的处理，得結果为

$$\operatorname{Re} f(\omega)-\operatorname{Re} f(\omega_0)=\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)}d\omega', \tag{23.8}$$

当 $\operatorname{Im} f(\omega')\to\text{const}\,(\omega'\to\infty)$ 时也收斂。

f_{sc} 是实数，故存立 (23.3) 的关系。$\operatorname{Im} f(\omega)$ 是 ω 的奇函数。因此可将(23.7)，(23.8)右边的积分限改写为由 0 到 ∞。特別是当 $\omega_0=0$ 时，(23.8)成为

$$\operatorname{Re}[f(\omega)-f(0)]=\frac{2\omega^2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} f(\omega')}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}d\omega', \tag{23.9}$$

上述关系式是 Kramers 和 Kronig 在 1927 年得出的。一般将 (23.7) 或 (23.8) 中函数的实数部分用虛数部分的积分表示的关系式称为色散公式❶。它在物理学上所以重要，是因为 $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ 具有物理意义，而且能直接測量而得。在光通过色散媒质时的散射振幅中，$\operatorname{Re} f(\omega)$ 与媒质对频率为 ω 的光的折射率有关，而 $\operatorname{Im} f(\omega)$ 与其吸收率有关。色散公式这个名称就是由此而来的。

§24 关于粒子散射的色散公式

上章所叙述的因果律，是指信号傳播一定不能超过光速的情形。这对相对論的情形来說，是非常有效的。所以在下节我們将作专門的叙述。可是在討論非相对論情形粒子的时候，我們知道，它

❶ 常称为色散关系。——譯者注

是不限及速度的，因此也就不存在什么波面，所以象(23.1)的因果条件就不成立。但即使在这种場合下也可作出色散公式。因为可以用各种各样的情况来考虑替换 (23.1) 的条件，不过在这里，我們仅利用由外向波导出的散射的 Green 函数(即，(3.8) 中 $k>0$)。

动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子在以势 $V(x)$ 散射时，其波函数为

$$\psi_k(x)=\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x})+\left(-\frac{2m}{4\pi}\right)\times\int\frac{\exp ik|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}V(\boldsymbol{x}')\psi_k(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}\quad(k=|\boldsymbol{k}|).\tag{24.1}$$

其中被积分项中 $k>0$。$\boldsymbol{k}'$ 方向的散射振幅，根据 (8.11)，为

$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})=-\frac{2m}{4\pi}\int\exp(-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x})V(\boldsymbol{x})\psi_k(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.\tag{24.2}$$

上式中之 $\psi_k(x)$ 可由求解 (24.1) 得出，但由于 V 很小，所以作 (24.1) 的逐次近似按 V 之冪展开也可求出其解。即

$$f(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})=\sum_n f^{(n)}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}),\tag{24.3}$$

$$f^{(n)}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k})=\left(\frac{-2m}{4\pi}\right)^n\int\prod_{m=1}^{n-1}\frac{V(x_m)V(x_n)}{|x_m-x_{m+1}|}\times\exp\left[-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}_1+\sum_{m=1}^{n-1}ik|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_{m+1}|+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_n\right]d\boldsymbol{x}_1\cdots d\boldsymbol{x}_n,\tag{24.4}$$

其中有关 k 的部分为

$$\exp\left\{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{x}_1-ik|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_n|\cos[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_n)]+\sum_{m=1}^{n-1}ik|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_{m-1}|\right\}.$$

特别是取其向前散射，令 $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$ 时，第一项就不存在。按三角不等式 $\sum_{m=1}^{n-1}|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_{m+1}|\geqslant|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_n|$。从而其指数函数为

$$\exp[ikA],\quad A\geqslant0.$$

这时，完全与前节一样，能够将 k 延拓到 $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ 的复平面上。上述討論对任意 $f^{(n)}$ 都成立，故对其和 $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) \equiv f(k)$ 可写出色散公式为

$$\operatorname{Re} f(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(k')}{k' - k} dk',$$

再如利用关系

$$f(-k) = f^{*}(k),$$

則右边积分改为由 0 到 ∞。而 $\operatorname{Im} f(k')$ 是具有意义的。根据 (14.3)，

$$\operatorname{Im} f(k') = \frac{k'}{4\pi} \sigma(k'),$$

所以
$$\operatorname{Re} f(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{0}^{\infty} \frac{k'^2 \sigma(k')}{k'^2 - k^2} dk'.$$

上式中右边的积分若不收斂时，与 (23.8) 同样处理即可。

§ 25 介子对靜止核子的散射

本节专討論荷电介子的散射問題。根据 (17.1) 的双曲型方程，介子在这个时候具有速度为 1（= 光速度）的波面。因此我們可以設想这种情况的散射振幅也可写成 (23.2)，(23.1) 的形式。当然，这用一般的方法就可以导出，但从我們已經求得的式子也能同样推得。根据 (22.9)，在 α 类动量为 $\boldsymbol{k}$ 的入射介子，及 β 类动量为 $\boldsymbol{k}'$ 的散射介子的情况下 S 矩陣元可由

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta : \boldsymbol{k}_\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t} e^{-i\omega t'} (\Psi P[\boldsymbol{V}_\beta^{\dagger}(\boldsymbol{k}' : t), \boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k} : t')] \Psi)$$
$$+ \delta_{\alpha\beta} \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'),$$
$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}, \quad \omega' = \sqrt{\boldsymbol{k}'^2 + m^2} \tag{25.1}$$

給出。此即所謂入射介子在时間 t' 时被吸收，而在时間 t 时被放出的过程在 t, t' 时的迭合关系。上式为二重积分，其中对 t' 的积

分可立刻积出。$V(\boldsymbol{k}, t)$ 由 (22.10) 式确定，令 Ψ 为总 Hamiltonian H 的本征态，则

$$(\Psi P[\boldsymbol{V}_\beta^\dagger(\boldsymbol{k}':t),\quad \boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k}:0)]\Psi)$$
$$=(\Psi P[\boldsymbol{V}_\beta^\dagger(\boldsymbol{k}:t-t'),\quad \boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k}:0)]\Psi),$$

上式中作变换 $t-t'\to t$，而对 t' 求积分

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta:\boldsymbol{k}_\alpha)=2\pi\delta(\omega-\omega')\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\omega t}(\Psi P[\boldsymbol{V}_\beta^\dagger(\boldsymbol{k}':t),\ \boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k}:0)]\Psi)$$
$$+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),$$

上式中 δ 函数表示散射前后的能量是守恒的。被积分项的方括号内是 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 的函数，所以将核子作静止的近似时（就象到目前为止所处理的那样），这一部分就成为含有 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 的非常简单的形式。即，若取第5章的相互作用 Hamiltonian，例如，对于荷正电的介子，

$$V^\dagger(\boldsymbol{k})=[V,\ a^*(\boldsymbol{k})]=g\frac{v(k)}{\sqrt{2\omega}}Q,$$

这里即使 $\boldsymbol{V}^\dagger(\boldsymbol{k})$ 含有 e^{iHt}，但对于在 Q 外的因子也仍然不变。故定义

$$\boldsymbol{j}_\alpha(t)=\frac{\sqrt{2\omega}}{v(k)}\boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{k}:t),$$

它已經是与 $\boldsymbol{k}$ 无关的量。利用上式作

$$F_{\beta\alpha}(\omega)=i\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\omega t}(\Psi P[\boldsymbol{j}_\beta^\dagger(t),\boldsymbol{j}_\alpha(0)]\Psi),\qquad(25.2)$$

得到与 S 的关系：

$$S(\boldsymbol{k}_{\beta'}:\boldsymbol{k}_\alpha)-\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')=2\pi\delta(\omega-\omega')\frac{v(k)v(k')}{2\omega}F_{\beta\alpha}(\omega).\qquad(25.3)$$

上式中的 $F_{\beta\alpha}(\omega)$ 还不是 (23.2), (23.1) 的形式，这是因为 $(\Psi P[\boldsymbol{j}(t),\boldsymbol{j}(0)]\Psi)$ 还未满足 (23.1) 的条件。因此将 (25.2) 重新改写一次。根据記号 P 的定义，

$$P[\boldsymbol{j}_\beta^\dagger(t),\boldsymbol{j}_\alpha(0)]=\eta(t)[\boldsymbol{j}_\beta^\dagger(t),\boldsymbol{j}_\alpha(0)]+\boldsymbol{j}_\alpha(0)\boldsymbol{j}_\beta^\dagger(t),\quad(25.4)$$

而 $\eta(t)$ 是由

$$\eta(t)=1, \quad t>0,$$
$$=0, \quad t<0$$

所确定的阶梯函数。F 中涉及到 (25.4) 的第二項的部分为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t}(\Psi \boldsymbol{j}_{\alpha}(0)\boldsymbol{j}_{\beta}^{\dagger}(t)\Psi)\\&=\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\sum_{n}(\Psi \boldsymbol{j}_{\alpha}(0)\Psi_{n})(\Psi_{n}\boldsymbol{j}^{\dagger}(t)\Psi)\\&=2\pi\sum_{n}\delta(\omega+E_{n})(\Psi \boldsymbol{j}_{\alpha}(0)\Psi_{n})(\Psi_{n}\boldsymbol{j}^{\dagger}(0)\Psi). \quad (25.5)\end{aligned}$$

而 Ψ_n 是总 Hamiltonian H 的本征态的完备系，E_n 为其本征值(令 $H\Psi=0$)。在 Ψ_n 仅是核子时的态，以及核子和数个介子所組成时的态，通常 $E_n>0$。可是 ω 为正的，所以 (25.5) 的 δ 函数成为 0。因而仅限于考虑 $\omega>0$,

$$M_{\beta\alpha}(\omega)=i\int dt\, e^{i\omega t}(\Psi\eta(t)[\boldsymbol{j}_{\beta}^{\dagger}(t),\boldsymbol{j}_{\alpha}(0)]\Psi), \quad (25.6)$$

与 $F_{\beta\alpha}(\omega)$ 是相同的。但是把 $M_{\beta\alpha}(\omega)$ 考虑为 ω 的解析函数时，它的性质就比較簡单，所以这里我們就专門用它来討論。

荷正、負电介子在质子中散射时，

$$M_{+}(\omega)=i\int_{0}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}(\Psi(P)[\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(t),\boldsymbol{j}_{+}(0)]\Psi(P)), \quad (25.7)$$

$$M_{-}(\omega)=i\int_{0}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}(\Psi(P)[\boldsymbol{j}_{-}^{\dagger}(t),\boldsymbol{j}_{-}(0)]\Psi(P)), \quad (25.8)$$

根据相互作用 Hamiltonian 的性质，可知 $\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(t)=\boldsymbol{j}_{-}(t)$。

从而成立

$$M_{+}(-\omega)=M_{-}^{*}(\omega) \quad (25.9)$$

的关系。这样，根据其交叉对称性，負能的散射振幅和正能的振幅就联系起来了。

由于 $M_{\beta\alpha}(\omega)$ 包含有 η 函数，就象最初我們所設想的那样，它具有 (23.2)，(23.1) 的形式。因此就能作出与第 1 节相同的色散

公式

$$\operatorname{Re} M_{\pm}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} M_{\pm}(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'.$$

上式右边积分中的 $M_{\pm}(\omega')$，$\omega'\geqslant m$ 是实际上真正引起散射的，在 $\omega'\leqslant -m$ 时，按 (25.9)，可将它改为 $\omega'\geqslant m$。现在成問題的是由 $-m$ 到 m 的积分。为了研究它，如同在 (25.5) 所处理过的那样，我們用完备系 Ψ_n 来把它展开：

$$\begin{aligned}M_{+}(\omega)=&i\sum_n\int_0^{\infty}dt\,e^{i\omega t}[(\Psi(P)\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(t)\Psi_n)(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}(0)\Psi(P))\\&-(\Psi(P)\boldsymbol{j}_{+}(0)\Psi_n)(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(t)\Psi(P))]\\=&\sum_n\frac{1}{E_n-\omega-i\varepsilon}(\Psi(P)\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(0)\Psi_n)(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}(0)\Psi(P))\\&+\sum_n\frac{1}{E_n+\omega+i\varepsilon}(\Psi(P)\boldsymbol{j}_{+}(0)\Psi_n)(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(0)\Psi(P)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} M_{+}(\omega)=\pi\sum_n\{&|(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}(0)\Psi(P))|^2\delta(E_n-\omega)\\&-|(\Psi_n\boldsymbol{j}_{+}^{\dagger}(0)\Psi(P))|^2\delta(E_n+\omega)\}.\end{aligned}\qquad(25.10)$$

Ψ_n 若仅为核子态 Ψ_0 时，$E_n=0$，其余情况下均有 $E_n\geqslant m$。故当 $-m<\omega<m$ 时，只有 Ψ_0 才能給出 $\operatorname{Im} M_{+}$：

$\boldsymbol{j}_{+}(0)$ 是 gQ，故当 $(\Psi_0 Q\Psi(P))=0$ 时，只剩下第二項。若用 (21.2) g_r 的定义，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-m}^{m}\frac{\operatorname{Im} M_{+}(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'=\frac{g_r^2}{\omega},\qquad(25.11)$$

同样处理可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-m}^{m}\frac{\operatorname{Im} M_{-}(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega'=-\frac{g_r^2}{\omega};\qquad(25.12)$$

$\operatorname{Im} M_{\pm}(\omega)$ 与 $\omega\geqslant m$ 时的正、負介子散射的总截面 $\sigma_{\pm}$ 成比例。即，在 (25.3) 中令 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 时，$\operatorname{Im} F$，从而 $\operatorname{Im} M$，与向前散射的 S 矩陣的虛数部分成比例。由 (14.3)，

$$\operatorname{Im} M_{\pm}(\omega)=\frac{k}{4\pi}\sigma_{\pm}(\omega), \quad k=\sqrt{\omega^2-m^2}. \qquad (25.13)$$

归納上面所述，就能得到下列的所謂色散公式。

$$\operatorname{Re} M_{+}(\omega)=\frac{g_r^2}{\omega}+\frac{1}{4\pi^2}\int_m^\infty \frac{k' d\omega'}{v(k')^2}\left[\frac{\sigma_{+}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma_{-}(\omega')}{\omega'+\omega}\right],$$

$$\operatorname{Re} M_{-}(\omega)=-\frac{g_r^2}{\omega}+\frac{1}{4\pi^2}\int_m^\infty \frac{k' d\omega'}{v(k')^2}\left[\frac{\sigma_{-}(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma_{+}(\omega')}{\omega'+\omega}\right].$$

这些积分若不收斂，按例計算即可。

§26 一般的情况

上一节中考虑的是静止的核子，而且是已知其相互作用 Hamiltonian 时的情况。但是这样所得出的色散公式，对于更一般的，即使是核子非静止时或不知道其相互作用的詳細情况时也成立。然而，这时必須假定散射現象是由因果关系引起的。它比起直到目前为止所处理的散射問題来說，是极端一般化了的情况，所以在这里我們只叙述其概要。

S 矩陣元可写成（令 $v(k)=1$）

$$S(\boldsymbol{k}'_\beta;\boldsymbol{k}_\alpha)=\frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}}\int dt\, d\boldsymbol{x}\, dt'\, d\boldsymbol{x}'\, e^{i\omega' t-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}}e^{-i\omega t'+i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}'}$$

$$\cdot(\Psi P[\boldsymbol{j}_\beta(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{j}_\alpha(\boldsymbol{x}',t')]\Psi)+\delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'), \qquad (26.1)$$

上式中，在所謂的时空点 $\boldsymbol{x}', t'$ 上入射介子消失，而在 $\boldsymbol{x}, t$ 点上产生了散射介子。在前一节中，我們是把作为散射体的核子固定在空間的原点上的，故 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)$ 含有 $\delta(\boldsymbol{x})$ 因子，而 S 与 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'$ 无关，仅为 ω 的函数。下面我們研究向前散射 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 的情况。由 (26.1) 求出能量（以及动量）守恒的项，并作相当于 (25.6) 的公式，则向前散射振幅为

$$M_{\beta\alpha}(\omega,\boldsymbol{k})$$

$$=i\int dt\, d\boldsymbol{x}\, e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}(\Psi\eta(t)[\boldsymbol{j}_\beta^\dagger(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{j}_\alpha(0,0)]\Psi), \qquad (26.2)$$

这里，被积函数是 x, t 的复杂的函数，但可知它满足下列条件。根据量子力学，两个物理量 A 与 B 的对易积 $[A,B]$ 表示 A 与 B 的测定是否相互干涉。若两者的测定均可完全独立地进行，则 $[A, B]=0$。若两个时空点 x, t 与 x', t' 类空地相間隔 $((x-x')^2-(t-t')^2>0)$，由于在此时不受信号傳播限制，故这二点上的测定相互并无影响。因此

$$[j_\beta^\dagger(x, t), j_\alpha(0, 0)]=0, \quad x^2-t^2>0. \tag{26.3}$$

上式就是場論中的因果律的表达式。这是(26.2)的写法。当介子在0, 0处消失，在 x, t 处产生时，那末对于0, 0来說，x, t 必然是其結果。即相当于，按因果律，原因必导致結果。于是在(26.2)中以 k 代换 $\sqrt{\omega^2-m^2}$ 时，得知

$$M_{\beta\alpha}(\omega)=i\int dt\, dx[\exp(i\omega t-i\sqrt{\omega^2-m^2}\, r\cos\theta)]N_{\beta\alpha}(x, t), \tag{26.4}$$

$$N_{\alpha\beta}(x, t)=0, \quad r<t. \tag{26.5}$$

上式中的 $M_{\beta\alpha}(\omega)$ 就按其原有形式扩張到复数 ω 平面上是困难的。因为，例如对于 $-m<\omega<m$，$\sqrt{\omega^2-m^2}$ 成为純虛数，而 r 的积分将会发散。为了避免这一点，我們先考慮 m^2 为負的情况，然后再討論 m^2 为正的情况。現以 ν 为参数定义函数

$$M_{\beta\alpha}(\omega, \nu)=i\int dt\, dx[\exp(i\omega t-i\sqrt{\omega^2+\nu r}\cos\theta)]N_{\beta\alpha}(x, t), \tag{26.6}$$

在 $t>r$ 时，若有 $\mathrm{Im}\,\omega>|\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2+\nu}|$，上式就收斂。特别是当 ν 为正时，$M_{\beta\alpha}(\omega)$ 由 $\mathrm{Im}\,\omega\geqslant 0$ 定义。这里，固定 $\nu>0$，考慮作为 ω 的函数的色散公式。此时若取 $t>r$，沿着通过 $\omega=i\infty$ 的半圆就可积分，并且得到

$$\mathrm{Re}\, M_{\beta\alpha}(\omega, \nu)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, M_{\beta\alpha}(\omega', \nu)}{\omega'-\omega}d\omega'.$$

上式右边由 $-\infty$ 到 m 以及由 m 到 ∞ 的部分为 $|\omega|\geqslant m$，故可令 $\nu\to -m^2$。而由 $-m$ 到 m 却仍是一个問題，但其积分可象前节的(25.11)，(25.12) 那样具体地計算出来，即将 ν 代以 m^2。这样所得的結果，除了最小的項以外，均与 (25.14)，(25.15) 相同，只是 $v(k)$ 等于1。

这样所得到的色散公式(25.14)，(25.15)与前一章的(21.5)，(21.6) 完全相同。由此可見，不使用 Hamiltonian，而只利用因果律这一条件，也可得出所要的方程。这种色散公式完全不含有近似，而是由基本原理直接导出的。从而，将这些式子用实驗驗証，就可判断出我們所具有的場的量子理論、介子的模型是否正确，这在一定程度上是已被証实了的。

色散公式不仅限于向前散射，对于有关各种不同的矩陣元也能写出。但当其实数部分、虛数部分不直接具有物理意义时，就不十分重要。又，这种方法完全沒有用到 Hamiltonian，而在理論上就表現不出裸质量或裸的結构因子等不能观测到的量，所以这也是将来場論发展的一个方向。

結束語

«量子力学中的数学方法»这一标題，在某种意义上来說，已經成为不很恰当的了。因此，本书中所处理的散射問題，作为其例子来說，也許会被认为是个特殊的問題。或許还有些讀者，可能把它看作是处理量子力学的数学基础。下面就来談談在这个題名之下处理散射問題的意图。

在量子力学中，作为研究的对象，例如原子、分子，以及它們所組成的集合体——气体、液体、固体等，往往将其作为基本的构成元素，且他們之間的相互作用都可当作是已知的。这时，由最基本的原理出发来推导出对象的性质就成为主要的問題。这类問題且取名为“向外的問題”。近似法的問題也是与此关連地产生的。

但是，将原子核或基本粒子作为对象时，这些对象的性质和相互作用是完全不知道的。例如，象质子那样的基本粒子能否作为点来考虑，其内部是否还有构造等尙不清楚；又，关于质子与介子之間的相互作用也只知其大概。在这种情况下，就不能从求解方程来找到答案，而探求弄清楚这些性质和相互作用的途徑，就成为最原始的問題了。也就是說，应首先解决基本方程是怎样的。这种問題就称为“向內的問題”。

現在我們若是要对所观測到的現象加以分析，那末就必須要考虑到我們究竟知道了多少事情。例如，不管基本粒子大小如何，在其外側的相互作用，无論如何也不会比光速傳播得快，于是，即使我們不知道基本粒子的“內部”情况，但在外部，量子力学也是适用的。此外，我們还要弄清楚在这种場合下，以观測所得的数据作为基础，对內部作进一步深入的了解能到什么程度；又，不論“內

部”如何，究竟存在着怎样的必然成立的关系。

随着弄清上述这些問題，也就提出了如下的所謂外側問題：即从現有的数据出发能够推断出多少事实。

象上述这种向內的問題的处理方法与求方程解的向外的做法具有很不相同的方面。由于作为基础的方程的形式沒有具体給出，因而說到方法，当然也只是記号化的。而基本粒子的散射問題就是受这种記号方法所驅使的，并可认为是在某种程度上获得了成功的。本书以处理散射問題为主的意图就在于此。

这样的編写方針是由以朝永先生为主，并有会津、谷、宮島等三人参加而确定的。实际上的执笔者为后三人。从第1章到第6章是由会津、谷为主編写初稿，經三人討論而成。中途因谷要赴美，于是第7章的色散关系就請这方面的一位专家宮澤参加編写。由于任务急迫，最后朝永先生对全部內容只略加过目，故声明文責由执笔者自負。

宮島龙兴

文 献

第1章 关于散射的簡单的处理方法，在普通量子力学教科书上都可找到，因此不一一列举，現仅把涉及到波束这部分的內容介紹如下：

1) 朝永振一郎： 量子力学 II（三鈴书店）有詳細叙述。

2) D. Bohm: Quantum Theory (Prentice-Hall, 1951)詳細闡述了用波束定式化处理散射問題。

3) Dirac: 量子力学（朝永、玉木、木庭、大冢譯，岩波书店）本书中已再三介紹过。

4) N. F. Mott & H. S. W. Massey: The Theory of Atomic Collisions (Oxford, 1949). 此书搜集了到1949年为止有关这方面的知識。

第2，3章 最早有意識地使用記号方法处理散射問題的有：

5)* B. A. Lippmann & J. Schwinger: Variational Principles for Scattering Processes, I, Phys. Rev., 79 (1950), 469～480.

6)* M. Gell-Mann & M. L. Goldberger: The Formal Theory of Scattering, Phys. Rev., **91** (1953), 398～408, 較易懂。* 有的論文由日本物理学会編集在物理学論文选集 67 "散射的一般理論" 中，其中也包含有本书中不很使用的近似方法的論文。

第 4 章 S 矩陣是由 Heisenberg 連系到基本粒子理論而开始导入的 (1943)。

7)* C. Møller: S-Matrix Danske Selsk. Mat.-fys. Medd., **23** (1945), 1～48 較易懂。还有最近的量子电动力学的教科书

8) J. M. Jauch & F. Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons (Addison-Wesley, 1955), Chap. 7 中也包含很多文献的解說，周相移分析的一般处理可参看本文中引用过的 Blatt & Biedenharn 的論文。

第 5, 6 章 关于場的理論有許多教科书，例如：

9) 朝永振一郎、福田信之、福田博：場的量子論（岩波讲座，現代物理学）。关于 Low 等理論的初等解說見

10)** G. C. Wick: Introduction to Some Recent Work in Meson Theory, Rev. Mod. Phys., **27** (1955), 339. 最初的見

11)** G. E. Chew & F. E. Low: Effective Range Approach to the Low-Energy p-Wave Pion-Nucleon Interaction, Phys. Rev., **101** (1956), 1570.

标有**邱的論文編集在物理学論文选集 "π 介子 II" 中。

第 7 章 关于因果律及色散关系，属于光的散射情況的可参看

12) N. G. van Kampen: S-Matrix and Causality Condition, I, Maxwell Field, Phys. Rev., **89** (1953), 1072.

属于介子的散射情況用場的理論所处理的較好論文有

13) M. L. Goldberger: Causality Conditions and Dispersion Relations, I; Boson Fields, Phys. Rev., **99** (1955), 979. 收集在物理学論文选集 75 "場的理論" 中。

校后記

关肇直

本书题名是"量子力学中的数学方法",但内容主要是讲散射問題。这样命名与选擇內容的理由,已由原作者在书中結束語里說明了。实际上,量子物理学的两个中心問題可以說是:(1)描述和了解一个个别物理系統(例如基本粒子、原子、一般粒子)的性质;(2)描述和了解这些粒子之間的碰撞过程。因此,原书的选題确实抓住了当前量子物理学中的主要問題。特别,这个主題涉及的数学方法也是非常丰富的。

在当前我国日益增多的数学工作者們关心現代物理学中的数学問題的情况下,这样一本书的翻譯出版是很有益的。这本书以很少的篇幅介紹了散射理論方面的各种問題,給讀者一个很好的簡短扼要的介紹。当然,本书假定讀者至少对于量子力学已具有初步的知識❶。此外,象本丛书中的其他各书一样,本书的叙述是非常簡炼的,因而对于初学者,如果不輔以其他参考书,讀起来可能会有些困难。由于量子力学的书籍很多(包括各种文字的),这里不准备一一枚举❷,也不在譯本上各个簡略之处注明其他参考书。这里只預备介紹一下,从数学研究的角度看来,有关散射問題的几个有兴趣的方面,希望借此引起国內学者的注意。

关于粒子碰撞过程的最早一部专門著作乃是莫特与馬塞的专书[1]。这书出版以后又出現了大量的工作。其中一部分是由于量子場論,要求把碰撞問題作更抽象更一般的陈述,另一方面是由于

❶ 参看后附参考文献[3],而对于数学上严謹的叙述,可以参看参考文献[4]。

❷ 关于散射的形式理論,可参看参考文献[5]。

原子核物理，要求在不确切知道力的情况之下能說明核反应的实驗材料。于是引入了 S-陣的概念，引起了大量的研究工作（参看 [2]）。

有一些作者企图建立散射的严謹数学理論。这方面特别値得注意的是 J. M. Jauch 等人的工作（参見[6]，[7]，[9]，[10]，[11]，[13]，[14]，[25]）。Jauch 主張运用 Hilbert 空間中綫性算子的理論，而避免用奇异函数；他认为“使用这种工具（奇异函数）往往把場論中的数学困难变成晦暗，并且这是在 Hilbert 空間与泛函分析还不为物理学家所熟悉的时代发明的工具。但泛函分析这一发展得很好而易于接近的分支包含了散射理論中处理数学問題所需的大多数工具”（見[6]）。如果用 H_1 表示物理系統的总 Hamiltonian，而 H_0 是未受扰的 Hamiltonian，那末令

$$U_t=\exp(itH_1)\exp(-itH_0),$$

并称

$$W_{\pm}=\lim_{t\to\pm\infty} U_t \quad (\text{强斂})$$

为波算子。黑田[11]指出主要的数学問題是証明：(1) 上面极限存在，并証明 (2) S 是保范算子，也就是要証明 W_+ 与 W_- 具有相同的値域。Jauch 是在假定(1)(2)的条件下討論散射算子 U 与波算子的性质。有些作者[13][14]在一些具体情况下解答了(1)。黑田在較一般的情况下解决了 (1) (2)，并把这問題和連續譜受有界算子的扰动的数学問題联系起来[12]。这方面还可以参看参考文献[10]，[23]，[24]。

散射問題中另一个有趣問題是所謂反問題，也就是說，由 S-陣来反求位勢的形状。这問題离解决还很远，但已引起了大量的工作，并且涉及許多数学工具。关于这方面，可以参看 Фаддеев 的总結性文章[15]以及最近刚出版的专书[26]。又关于基本粒子或原子核碰撞时所形成的中間系統的研究涉及非自伴算子与特征陣函数的研究——这时 S-陣就是一个非自伴算子的特征陣函数。

这方面，可以参看 Бродский 与 Лившиц 的总結性文章[18]，又可参看参考文献 [17]，[27]。

关于量子場論部分，首先，現在我国已有了一部材料丰富，在許多方面有其特点的著作——朱洪元同志的《量子場論》[20]。讀者从这本书可以获得量子場論的基础知識。在这方面，特别是色散关系(本书称作色散公式)的研究吸引着許多数学家和物理学家的注意[21]。許多学者致力于研究从量子場論的一般原理，已知相互作用着的相对論性粒子的质量、自旋、…等，能够关于描述相互作用的散射陣导出些什么性质来。这种基本的一般原理可以用公理方式陈述出来(参看参考文献[29])。由于目前对基本粒子的相互作用还缺乏滿意的描述，于是許多人設想从这样的基本假定出发导出一些能由实驗検証的事实来。在这些假定中要求包括所謂"局部对易性"，即在不能由光信号联系的时空点处所取的場算子必对易。只利用这些基本假定就可以导出一些散射过程的散射振幅的色散关系，而这些关系原則上是可用实驗検証的。这方面的研究包括散射陣与場算子間的关系，因果交换子的数学表現，与色散关系的推导。Боголюбов 学派第一次对色散关系給出了数学上严謹的証明，后来又作了簡化(参看参考文献 [22]，[28])。关于因果交换子的数学表現，已有許多工作(見参考文献 [30]，[31]，[32]，[36] 等)，但数学上严謹的証明仍是有趣的❶。因果性条件与色散关系的关联已經可以化成純粹数学的形式(見参考文献 [35]，[38] 等)。目前許多学者从事双重色散关系的研究，这方面苏联收集出版了論文集[39]。給出双重色散关系在数学上严謹的証明将是非常重要的工作。

希望这本小书的翻譯出版給国内渴望从事現代物理学中的数

---

❶ 在 [30] 中提到瑞典数学家 Gårding 有了数学上严謹的处理，但未見发表。又参看参考文献 [36]。

学問題的这一部分——散射問題的研究者提供初步的綫索，也希望这本小书能引起更多的人的兴趣和关怀，以便在这方面的研究能够逐漸开展起来。

1961年7月1日

参考文献

[1] N. F. 莫特与 H. S. W. 馬塞：原子碰撞理論，科学出版社，1960.

[2] W. Brenig und R. Haag: Allgemeine Quantentheorie der Stoszprozesse, Fortschritte der Physik, 7 (1959), 183～242.

[3] 布洛欣采夫：量子力学原理。

[4] G. Ludwig: Grundlagen der Quantenmechanik.

[5] А. С. Давыдов: Теория атомного ядра, 1958, 第九章。

[6] J. M. Jauch: Theory of the scattering operator, Helv. Phys. Acta, 31 (1958), II, 同上，661～684.

[7] M. N. Hack: Wave operators in multichannel scattering, Nuovo Cimento, 13(1959), 231～236.

[8] T. A. Green and O. E. Lanford: Rigorous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle, J.Math. Phys., 1 (1960), 130～146.

[9] Galindo Tiscaire Alberto: Scattering integral equations in Hilbert space, Helv. Phys. Acta, 32 (1959), 412～422.

[10] Ikebe, Terno: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator and their applications to scattering theory, Arch. rat. Mech. Analysis, 5 (1960), 1～34.

[11] S. T. Kuroda: On the existence and the unitarity property of the scattering operator, Nuovo Cimento, 12 (1959), 431～454.

[12] S. T. Kuroda: Perturbation of continuous spectra by unbounded operators, I, Journ. Math. Soc. Japan, 11 (1959), 247～262.

[13] J. M. Cook: Convergence to the Møller wave matrix, J. Math. and Phys., 36 (1957), 81～87.

[14] J. M. Jauch and I. I. Zinnes: The asymptotic condition for simple

scattering systems, Nuovo Cimento, 11 (1959), 553～567.

[15] Л. Д. Фаддеев: Обратная задача квантовой теории рассеяния, УМН, 14: 4 (1959), 57～119.

[16] В. К. Мельников: О приближенных методов в обратной задаче квантовой теории рассеяния, УМН, 14: 4 (1959), 121～131.

[17] C. L. Dolph and F. Penzlin: On the theory of a class of non-self-adjoint operators and its applications to quantum scattering theory, Ann. Sc. Acad. Fenn. 1959, No. 263, pp36.

[18] М. С. Бродский и М. С. Лившиц: Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 13:1 (1958), 3～85.

[19] М. С. Лившиц: О приненении несамосопряженных операторов в теории рассеяния, Ж. Эксп. Теорет. Физ., 31 (1956), 121～131.

[20] 朱洪元：量子場論，科学出版社，1960.

[21] Проблемы современной физики, 1957: 2, Дисперсионные соотношения.

[22] Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев и М. К. Поливанов: Вопросы теории дисперсионных соотношений, 1958.

[23] 加藤敏夫：散乱演算子と連續スペクトルの摄动，数学，9: 2 (1957), 75～84.

[24] 加藤敏夫：量子力学に关する偏微分方程式，数学，10: 4 (1959), 212～219.

[25] M. N. Hack: On convergence to the Møller wave operators, Nuovo Cimento, 9 (1958), 731～733.

[26] З. С. Агранович и В. А. Марченко: Обратная задача квантовой теории рассеяния, 1960.

[27] C. L. Dolph: Recent developments in non-self-adjoint problems of mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc., 69: 1 (1961), 1～69.

[28] В. С. Владимиров и А. А. Логунов: Об аналитических свойствах обобщенных функций квантовой теории поля, Изв. АНСССР,

сер. Матем., 23 (1959), 661～667.

[29] A. S. Wightman: Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, Phys. Rev., 101 (1956), 860～866.

[30] H. Lehmann: Scattering matrix and field operators, Supplemental vol. 14 del Nuovo Cimento (1959), 153～176.

[31] F. J. Dyson: Integral representations of causal commutators, Phys. Rev., 110 (1958), 1460～1464.

[32] R. Jost. und H. Lehmann: Integraldarstellung kausaler Kommutators, Nuovo Cimento, 5 (1957), 1598～1610.

[33] R. Haag: The frame work of quantum field theory, Nuovo Cimento, Supplemental vol. 14 (1959), 131～152.

[34] H. J. Bremmermann, R. Oehme and J. G. Taylor: Proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys. Rev., 109 (1958), 2178～2190.

[35] J. G. Taylor: Dispersion relations and Schwartz's distribution, Ann. of Phys., 5 (1958), 391～398.

[36] R. F. Streater: Special methods of analytic completion in field theory, Proc. Roy. Soc., A 256 (1960), 39～52.

[37] R. F. Streater: Double commutator in quantum field theory, J. of Mathematical Physics, 1 (1960), 231～233.

[38] J. Hilgevoord: Dispersion relations and causal description, An introduction to dispersion relations in field theory, 1960.

[39] Новый метод в теории сильных взаимодействий, Двойные дисперсионные представления, Сборник Статей, 1960.